

離散Gray-Scottモデルの時空パターンと平衡解の Turing 不安定性

メタデータ	言語: Japanese 出版者: 武蔵野大学数理工学センター 公開日: 2018-03-13 キーワード: 作成者: 松家, 敬介 メールアドレス: 所属:
URL	https://mu.repo.nii.ac.jp/records/732

離散 Gray-Scott モデルの時空パターンと平衡解の Turing 不安定性

A relation between spatial pattern of discrete Gray-Scott model and Turing instabilities of its equilibrium solutions

松家 敬介¹

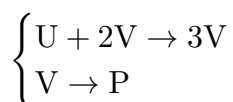
Keisuke Matsuya

概要

Gray-Scott モデルは自己触媒反応の数理モデル化として知られている反応拡散系である。これまでの研究で、Gray-Scott モデルの超離散化可能な離散化とその差分方程式系のパラメータを変えることで様々な時空パターンを与える解が得られている。本稿では、これまでの研究で得られている離散化に対して Turing 不安定性を議論し、その差分方程式系の解が示す一部の時空パターンが Turing 不安定性によって切り替わることを見出した。

1 はじめに

Gray-Scott モデルは自己触媒反応:



の数理モデル化 [1] として知られている。物質 U および物質 V は同じ割合で系から排出されており、物質 U のみ一定の量が系に供給されている状況を考えている。具体的には以下の反応拡散系である。

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - uv^2 + a(1 - u) \\ \frac{\partial v}{\partial t} = D \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + uv^2 - bv \end{cases} \quad (1)$$

ただし、 $u := u(t, x)$, $v := v(t, x)$, $t \geq 0$, $x \in \Omega_c \subset \mathbb{R}$, $a, b, D > 0$ とする。 u , v は物質 U および物質 V それぞれの時刻 t , 位置 x における濃度に対応しており、パラメータ D は物質 U に対して物質 V が拡散する速さに対応するものである。また、パラメータ a は物質 U が系に供給される量および排出される割合に関するものである。さらに、パラメータ b は物質 V が系から排出される割合と 2 つ目の反応式の反応速度定数に関するものである。物質 U および物質 V が系から排出される割合は同じであり、2 つ目の反応式で V が減少していることから、 $a < b$ である場合を考える。

(1) は初期条件だけでなくパラメータ a, b, D を変化させることで様々な時空パターンを与えることも知られている [6, 7]。これまでの研究で、[6, 7] に類似した時空パターンが得られる

¹ 武蔵野大学数理工学センター員 / 武蔵野大学工学部数理工学科講師

(1) の離散化および超離散化が得られている [3]. (1) の時空パターンは (1) の平衡解の安定性が関係していることが知られている [5]. 特に, (1) の拡散項を取り除いた空間一様解に対する常微分方程式系の平衡解まわりでの線形安定性と拡散項を含めた Turing 不安定性が扱われている. これまでの研究で (1) の離散化に対して, 空間一様解に対する差分方程式系の平衡解まわりでの線形安定性についてのみ扱っていた. 本稿では, 拡散の効果も含めた Turing 不安定性と時空パターンの関係性について議論したい.

本稿の構成は次の通りである. まず, 第 2 節で (1) の離散化およびその解の時空パターンについて説明する. 次に, 第 3 節では (1) の離散化に対する Turing 不安定性について議論し, 第 4 節で第 2 節の数値計算の結果と共に考察を行う. 最後に, 第 5 節では本稿の結論と今後の課題を示す.

2 離散 Gray-Scott モデルについて

本節では, [3] にもとづいて (1) の離散化およびその時空パターンについて解説する. 超離散化を考える都合上, [3] では (1) に対して $w := v + 1$ と変数変換を行った方程式系の離散化を行っている.

2.1 Gray-Scott モデルの離散化

まず, 変数変換を行った (1) の拡散項を除いた常微分方程式系 :

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = -u(w-1)^2 + a(1-u) \\ \frac{dw}{dt} = u(w-1)^2 - b(w-1) \end{cases} \quad (2)$$

の離散化を考える. 次の差分方程式系 :

$$\begin{cases} u^{s+1} = \frac{u^s + \delta(2u^s w^{s+1} + a)}{1 + \delta\{(w^{s+1})^2 + a + 1\}} \\ w^{s+1} = \frac{w^s + \delta[u^s\{(w^s)^2 + 1\} + b]}{1 + \delta(2u^s + b)} \end{cases} \quad (3)$$

は (2) の離散化となっている. 実際に, (3) は

$$\begin{aligned} \frac{u^{s+1} - u^s}{\delta} &= -u^s (w^{s+1} - 1)^2 + a(1 - u^s) + o(\delta) \quad (\delta \rightarrow +0) \\ \frac{w^{s+1} - w^s}{\delta} &= u^s (w^s - 1)^2 - b(w^s - 1) + o(\delta) \quad (\delta \rightarrow +0) \end{aligned}$$

と変形できることからわかる. (3) をもとにして, (1) の離散化を構成する. そこで,

$$m_p(u_n^s) := \frac{u_{n+p}^s + u_{n-p}^s}{2}, \quad m_q(v_n^s) := \frac{v_{n+q}^s + v_{n-q}^s}{2}$$

とする. ただし, $p, q \in \mathbb{Z}_{>0}$ とする. これらを用いた差分方程式系 :

$$\begin{cases} u_n^{s+1} = \frac{m_p(u_n^s) + \delta \{2m_p(u_n^s) w_n^{s+1} + a\}}{1 + \delta \{(w_n^{s+1})^2 + a + 1\}} \\ w_n^{s+1} = \frac{m_q(w_n^s) + \delta [m_p(u_n^s) \{m_q(w_n^s)^2 + 1\} + b]}{1 + \delta \{2m_p(u_n^s) + b\}} \end{cases} \quad (4)$$

は (1) の特殊な場合の離散化となる. 実際に, $\xi := \sqrt{2\delta}/p$ とし, (4) が

$$\begin{aligned} \frac{u_n^{s+1} - u_n^s}{\delta} &= \frac{u_{n+p}^s - 2u_n^s + u_{n-p}^s}{(p\xi)^2} - m_p(u_n^s) (w_n^{s+1} - 1)^2 \\ &\quad + a(1 - u^s) + o(\delta) \quad (\delta \rightarrow +0) \\ \frac{w_n^{s+1} - w_n^s}{\delta} &= \frac{q^2}{p^2} \frac{w_{n+q}^s - 2w_n^s + w_{n-q}^s}{(q\xi)^2} + m_p(u_n^s) \{m_q(w_n^s) - 1\}^2 \\ &\quad - b \{m_q(w_n^s) - 1\} + o(\delta) \quad (\delta \rightarrow +0) \end{aligned}$$

と変形できることから $D = q^2/p^2$ の場合の (1) の離散化であることがわかる. この反応拡散系の離散化の手法は, 最初に反応項に対応する離散化を行い, 次に拡散項の対応物を付け加えるというものであり, [4] で報告したものと類似した手法である. 本稿では (4) を離散 Gray-Scott モデルと呼ぶ. 離散 Gray-Scott モデルの解は, 後述するように, 初期条件だけでなくパラメータ a, b, p, q, δ に依存して様々な時空パターンを与える. さらに超離散化することも出来, 超離散化した後も類似した時空パターン, 特にフラクタル図形として知られるシェルピンスキーギャスケットを与えることがこれまでの研究でわかっている [3].

2.2 離散 Gray-Scott モデルの平衡解とその線形安定性について

2.2.1 Gray-Scott モデルの平衡解について

(4) の平衡点について述べる前に (1) の平衡点について簡単に纏める. Gray-Scott モデルの平衡点とは (2) の左辺を 0 にした連立方程式の解であり, 以下のとおりである.

$$\begin{aligned} P_{c,0} &: (u_{c,0}, v_{c,0}) = (1, 0), \\ P_{c,\pm} &: (u_{c,\pm}, v_{c,\pm}) = \left(\frac{a}{2} \left(1 \mp \sqrt{1 - \frac{4b^2}{a}} \right), \frac{a}{2b} \left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{4b^2}{a}} \right) \right) \end{aligned}$$

$P_{c,\pm}$ は $a - 4b^2 > 0$ の場合に生じる平衡点であり, $P_{c,0}$ は a, b の値に関係せずに生じる平衡点となっている. さらに, これらの平衡点のまわりの安定性について調べる. 例えば, $P_{c,+}$ のまわりで (2) を線形化した方程式系は

$$\begin{cases} \frac{d\mu}{dt} = - \left\{ (v_{c,+})^2 + a \right\} \mu - 2b\nu \\ \frac{d\nu}{dt} = (v_{c,+})^2 \mu + b\nu \end{cases}$$

となり, この方程式系の解は次の行列:

$$\begin{pmatrix} -\left\{(v_{c,+})^2 + a\right\} & -2b \\ (v_{c,+})^2 & b \end{pmatrix}$$

のトレースが負で, 行列式が正のときに零解に収束する. これらの条件をパラメータ a, b で書き直すと

$$b - \frac{a^2}{2b^2} \left(1 + \sqrt{1 - \frac{4b^2}{a}}\right) < 0 \quad (5)$$

であり, (5) が満たされるとき $P_{c,+}$ が漸近安定な平衡点であることがわかる. ほかの平衡点についても纏めると以下ようになる.

$P_{c,0} \Rightarrow$ 線形安定 (漸近安定)

$P_{c,-} \Rightarrow$ 不安定

$P_{c,+} \Rightarrow$ (5) が成立すれば線形安定 (漸近安定), しなければ不安定

2.2.2 離散 Gray-Scott モデルの平衡解について

離散 Gray-Scott モデルの平衡解は (3) の独立変数 s を取り除いた u および w の連立方程式を解くことで得られ, 以下の通りとなる.

$$\begin{aligned} P_{d,0} &: (u_{d,0}, w_{d,0}) = (1, 1), \\ P_{d,\pm} &: (u_{d,\pm}, w_{d,\pm}) = \left(\frac{a}{2} \left(1 \mp \sqrt{1 - \frac{4b^2}{a}}\right), 1 + \frac{a}{2b} \left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{4b^2}{a}}\right) \right) \end{aligned}$$

平衡点の位置は (1) のそれらと対応したものとなっている. さらに平衡点のまわりの安定性を調べる. 例えば, $P_{d,+}$ のまわりで (3) を線形化した方程式系は

$$\begin{cases} \mu^{s+1} = \frac{1 + 2\delta w_{d,+}}{1 + \delta \left\{(w_{d,+})^2 + a + 1\right\}} \mu^s - \frac{2\delta b}{1 + \delta \left\{(w_{d,+})^2 + a + 1\right\}} \nu^{s+1} \\ \nu^{s+1} = \frac{\delta (w_{d,+})^2}{1 + \delta (2u_{d,+}b + 1)} \mu^s + \frac{1 + 2\delta (u_{d,+}b + 1)}{1 + \delta (2u_{d,+}b + 1)} \nu^s \end{cases} \quad (6)$$

となり, (6) の解が零解に収束すれば $P_{d,+}$ は漸近安定な平衡解となる. (6) の第 1 式の右辺に ν^{s+1} があるので, (6) の右辺の係数を並べた行列を

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1 + 2\delta w_{d,+}}{1 + \delta \left\{(w_{d,+})^2 + a + 1\right\}} & \frac{-2\delta b}{1 + \delta \left\{(w_{d,+})^2 + a + 1\right\}} \\ \frac{\delta (w_{d,+} - 1)^2}{1 + \delta (2u_{d,+}b + 1)} & \frac{1 + 2\delta (u_{d,+}b + 1)}{1 + \delta (2u_{d,+}b + 1)} \end{pmatrix} \quad (7)$$

とし, (6) の解が零解に収束するかは次の行列 :

$$\begin{pmatrix} A_{11} + A_{12}A_{21} & A_{12}A_{22} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$$

の固有値の絶対値がすべて 1 より小さくなるかを考えればよい. この行列の固有多項式は

$$\lambda^2 - (A_{11} + A_{22} + A_{12}A_{21})\lambda + A_{11}A_{22} \quad (8)$$

であり, 固有値の絶対値がすべて 1 より小さくなるための必要十分条件は

$$\begin{aligned} |A_{11}A_{22}| &< 1 \\ 1 - (A_{11} + A_{22} + A_{12}A_{21}) + A_{11}A_{22} &> 0 \\ 1 + (A_{11} + A_{22} + A_{12}A_{21}) + A_{11}A_{22} &> 0 \end{aligned} \quad (9)$$

が満たされることであり, パラメータ a, b, δ の条件式に書き直すと

$$b - \frac{a^2}{2b^2} \left(1 + \sqrt{1 - \frac{4b^2}{a}} \right) + \delta \left[(2b - a) \left\{ 1 + \frac{a}{2b} \left(1 - \sqrt{1 + \frac{4b^2}{a}} \right) \right\} - a \right] < 0 \quad (10)$$

となる. (10) の左辺の δ^0 の項は (5) の左辺と一致しており, δ を小さくしていくことで $P_{d,+}$ のまわりの振る舞いが (1) の $P_{c,+}$ のまわりの振る舞いに近づいていくことがわかる. ほかの平衡点についても纏めると以下のようなになる.

$P_{d,0} \Rightarrow$ 線形安定 (漸近安定)

$P_{d,-} \Rightarrow$ 不安定

$P_{d,+} \Rightarrow$ (10) が成立すれば線形安定 (漸近安定), しなければ不安定

2.3 離散 Gray-Scott モデルの時空パターンについて

本小節では (4) の解として得られる時空パターンについて概説する.

$p = 3, q = 1, \delta = 0.1$ とし, 初期条件として

$$\begin{aligned} u_0^j &= \begin{cases} 1 - 0.3 \cos\left(\frac{\pi n}{50}\right) & |n| \leq 25, \\ 1 & |n| > 25, \end{cases} \\ w_0^j &= \begin{cases} 1 + 0.5 \cos\left(\frac{\pi n}{50}\right) & |n| \leq 25, \\ 1 & |n| > 25. \end{cases} \end{aligned}$$

を与え, 空間方向に対して周期境界条件を課した下で計算した場合に w_n^s の値をプロットすることで得られる時空パターンを以下で挙げる. 縦軸は時間 s , 横軸は空間 n を表している. 値は, それぞれの図の右側の凡例による色で表現されている.

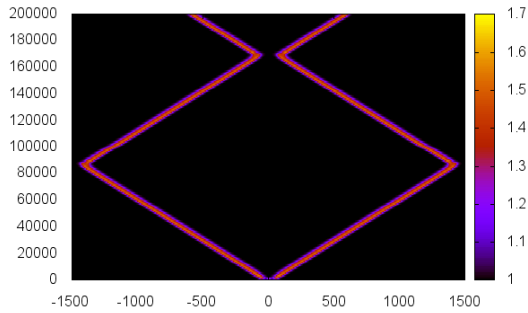


図1 $(a, b) = (0.03, 0.10)$

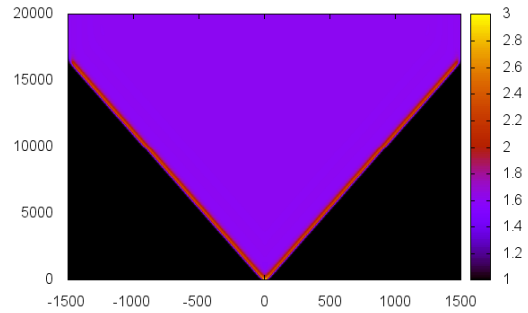


図2 $(a, b) = (0.04, 0.06)$

図1では、1つのピークが2つのピークに分裂し、互いに反対の方向に動き、境界で衝突して反射している。図2では、1つのピークが2つのピークに分裂し、互いに反対の方向に動くという点では図1と類似した時空間パターンになっている。しかし、それぞれのピークの間は図の中の黒い部分より少し値が大きくなっている。これは、(4)の平衡点 $P_{d,+}$ に落ち込んでしまった部分である。また、境界では2つのピークが衝突し、それぞれ消滅している。この点にも図1と異なる挙動が表れている。

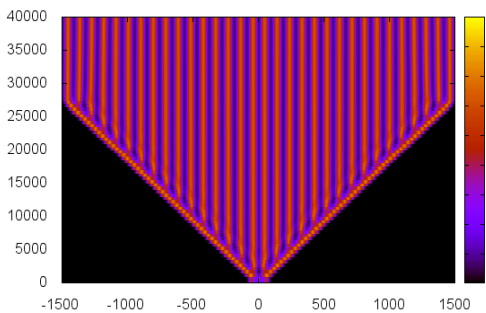


図3 $(a, b) = (0.04, 0.09)$

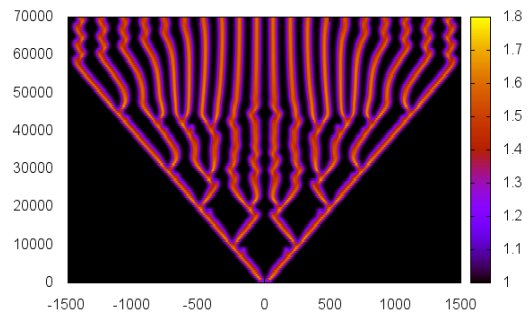


図4 $(a, b) = (0.04, 0.11)$

図3では、1つのピークが2つのピークに分裂し、互いに反対の方向に動き、ある程度ピーク同士が離れるとそれぞれ再び2つのピークに分裂し、一方はその場に留まり、もう一方は一定の方向に動いていくという現象を繰り返している。図4では、1つのピークが2つのピークに分裂し、互いに適当な方向に動き、ピーク同士の間隔がある程度できたときに分裂するという現象を繰り返している。図5では、1つのピークが2つのピークに分裂し、ある程度離れたのちにはほぼ同じ場所に留まる現象がみられる。図6では、ピークが高さをある程度変えた後に、その場にとどまり続けている。

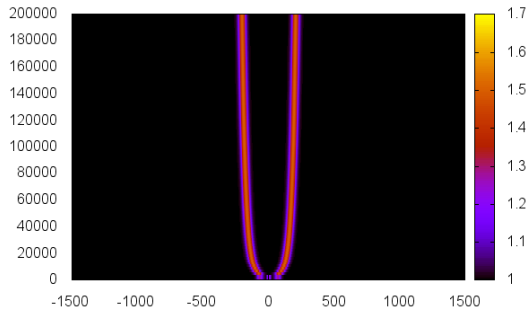


図 5 $(a, b) = (0.02, 0.09)$

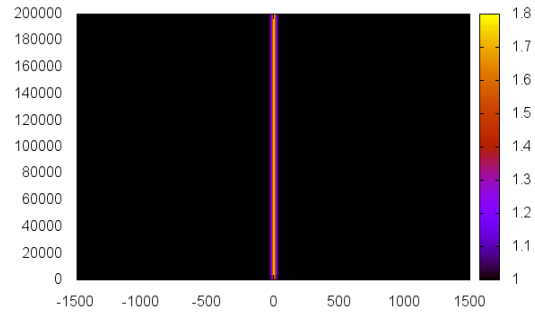


図 6 $(a, b) = (0.08, 0.17)$

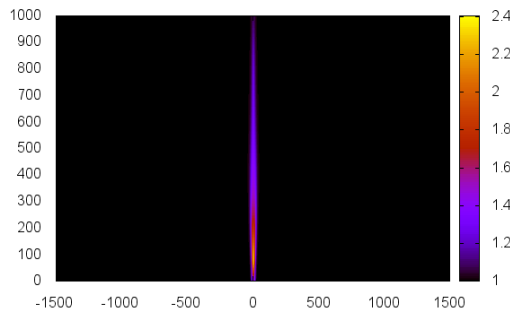


図 7 $(a, b) = (0.05, 0.15)$

図 7 では、ピークが高さを変えつつ時間の経過と共に低くなり消滅している。図 1 から図 7 の時空パターンは、(1) の数値計算として報告されているもの [6, 7] と類似したものとなっている。また、それぞれの時空パターンが得られるパラメータ a, b に関する領域に関する結果 [7] も報告されている。パラメータ a, b に関する領域を (4) に対しても調べると図 8 が得られる。赤い曲線は $b = 4a^2$ であり、これは平衡点 $P_{d\pm}$ が生じる境目となっている。詳しくは、この曲線より下側の領域でこれらの平衡点が生じる。 $P_{d,+}$ が不安定になる領域の境目となる曲線

$$b - \frac{a^2}{2b^2} \left(1 + \sqrt{1 - \frac{4b^2}{a}} \right) + \delta \left[(2b - a) \left\{ 1 + \frac{a}{2b} \left(1 - \sqrt{1 + \frac{4b^2}{a}} \right) \right\} - a \right] = 0$$

は $b = 4a^2$ に近くなっているので表示していない。なお、 $P_{d,+}$ が (10) を満たすことで不安定になる領域に入っているもので図 8 に示しているものは

$$(a, b) = (0.02, 0.07), (0.04, 0.10), (0.05, 0.11)$$

の 3 点である。また、緑色の直線は $b = a$ である。 [7] では、パラメータに対して $b > a$ という制約が入った場合のパラメータの相図が報告されており、ここでは [7] で調べられている部分

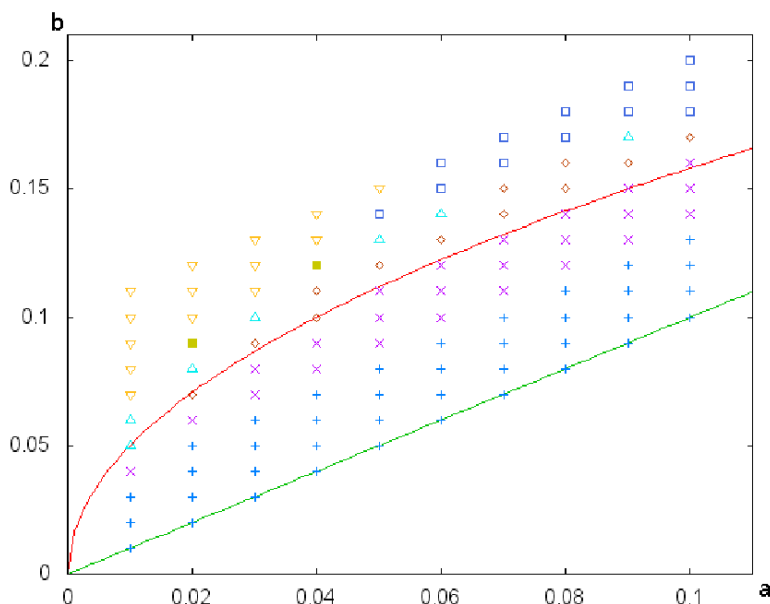


図 8 $p = 3, q = 1, \delta = 0.1$ の場合の a, b の相図

と対応する部分を調べている. パラメータのどの領域でどの時空パターンが見られるかは以下の通りになっている.

\triangle : 図 1; $+$: 図 2; \times : 図 3; \diamond : 図 4; \blacksquare : 図 5; \square : 図 6; ∇ : 図 7

図 8 は [7] で報告されているものと類似したものが得られている.

3 離散 Gray-Scott モデルの Turing 不安定性について

本節では, [2] を参考にして, 周期境界条件:

$$u_{n+N}^s = u_n^s, w_{n+N}^s = w_n^s \quad (\forall s \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, \forall n \in \mathbb{Z})$$

における離散 Gray-Scott モデルの Turing 不安定性について議論する. ただし, $N \in \mathbb{Z}_{>0}$ は定数とする.

Turing 不安定性を議論するために, 線形安定である平衡解に注目し, 空間に対応する変数 n に関する変化でその安定性がどうなるかを考える. 前節でも挙げたように, (4) の平衡解であって線形安定なものは

$$P_{d,0} : (u_{d,0}, w_{d,0}) = (1, 1),$$

$$P_{d,+} : (u_{d,+}, w_{d,+}) = \left(\frac{a}{2} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{4b^2}{a}} \right), 1 + \frac{a}{2b} \left(1 + \sqrt{1 - \frac{4b^2}{a}} \right) \right)$$

の 2 つであった. ただし, $P_{d,+}$ はパラメータ a, b, δ が $a - 4b^2 > 0$ および (10) を満たす場合に線形安定であったことに注意しておく. それぞれの平衡解のまわりで線形化を行うと

- $P_{d,0}$ のまわり

$$\begin{cases} \mu_n^{s+1} = \frac{1+2\delta}{1+\delta(a+2)} m_p(\mu_n^s) \\ \nu_n^{s+1} = \frac{1+2\delta}{1+\delta(b+2)} m_q(\nu_n^s) \end{cases} \quad (11)$$

- $P_{d,+}$ のまわり

$$\begin{cases} \mu_n^{s+1} = \frac{1+2\delta w_{d,+}}{1+\delta\{(w_{d,+})^2+a+1\}} m_p(\mu_n^s) - \frac{2\delta b}{1+\delta\{(w_{d,+})^2+a+1\}} \nu_n^{s+1} \\ \nu_n^{s+1} = \frac{\delta(w_{d,+})^2}{1+\delta(2u_{d,+}b+1)} m_p(\mu_n^s) + \frac{1+2\delta(u_{d,+}b+1)}{1+\delta(2u_{d,+}b+1)} m_q(\nu_n^s) \end{cases} \quad (12)$$

ただし、線形化する際に、 $u_{d,+}$ および $w_{d,+}$ 間に成り立つ関係式を使っている。

ここで、

$$\theta_k := \frac{2k\pi}{N} \quad (k = 0, \dots, N-1)$$

$$U_k^s := \sum_{n=0}^{N-1} \mu_n^s e^{in\theta_k}, \quad W_k^s := \sum_{n=0}^{N-1} \nu_n^s e^{in\theta_k}$$

とし、(11) および (12) の両辺に $e^{in\theta_k}$ をかけて k に関して 0 から $N-1$ までの総和をとると、

$$\begin{cases} U_k^{s+1} = \frac{1+2\delta}{1+\delta(a+2)} (\cos p\theta_k) U_k^s \\ W_k^{s+1} = \frac{1+2\delta}{1+\delta(b+2)} (\cos q\theta_k) W_k^s \end{cases} \quad (13)$$

および

$$\begin{cases} U_k^{s+1} = \frac{1+2\delta w_{d,+}}{1+\delta\{(w_{d,+})^2+a+1\}} (\cos p\theta_k) U_k^s - \frac{2\delta b}{1+\delta\{(w_{d,+})^2+a+1\}} W_k^{s+1} \\ W_k^{s+1} = \frac{\delta(w_{d,+}-1)^2}{1+\delta(2u_{d,+}b+1)} (\cos p\theta_k) U_k^s + \frac{1+2\delta(u_{d,+}b+1)}{1+\delta(2u_{d,+}b+1)} (\cos q\theta_k) W_k^s \end{cases} \quad (14)$$

が得られる。周期境界条件を考えているため、総和をとる途中で次の計算：

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{N-1} m_p(\mu_n^s) e^{in\theta_k} &= \sum_{n=0}^{N-1} \frac{(\mu_{n+p}^s + \mu_{n-p}^s) e^{in\theta_k}}{2} \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \sum_{n=0}^{N-1} \mu_n^s e^{i(n-p)\theta_k} + \sum_{n=0}^{N-1} \mu_n^s e^{i(n+p)\theta_k} \right\} \\ &= \frac{e^{ip\theta_k} + e^{-ip\theta_k}}{2} \sum_{n=0}^{N-1} \mu_n^s e^{in\theta_k} = (\cos p\theta_k) U_k^s \end{aligned}$$

を使っている。

任意の k に対して線形差分方程式系 (13) もしくは (14) の解が零解に収束するかを判定することで周期境界条件に対する離散 Gray-Scott モデルの平衡解の安定性がわかる. ただ, (13) は $\cos p\theta_k, \cos q\theta_k \leq 1$ および, a, b, δ が正の定数であることからその解は零解に収束し, $P_{d,0}$ は Turing 不安定を起こさない安定な平衡解であることがわかる. 一方, (14) については第 2 節で説明した数値計算の結果と併せて次節で議論したい.

4 数値計算の結果と Turing 不安定性に関する考察

本節では, 第 3 節に引き続き, 第 2 節で扱った数値計算における離散 Gray-Scott モデルの Turing 不安定性について議論する. 即ち, $p = 3, q = 1, N = 3001, \delta = 0.1$ とした場合を考える. (14) の U_k^s に関する方程式の右辺に W_k^{s+1} があるので, 任意の k に対して線形差分方程式系 (14) の解が零解に収束するかは, 第 2 節で扱った行列 (7) の要素を用いた次の行列:

$$\begin{pmatrix} (A_{11} + A_{12}A_{21})(\cos p\theta_k) & A_{12}A_{22}(\cos q\theta_k) \\ A_{21}(\cos p\theta_k) & A_{22}(\cos q\theta_k) \end{pmatrix}$$

の固有値の絶対値がすべて 1 より小さくなるかを考えればよい. この行列の固有多項式は

$$\lambda^2 - \{(A_{11} + A_{12}A_{21})(\cos p\theta_k) + A_{22}(\cos q\theta_k)\} \lambda + A_{11}A_{22}(\cos p\theta_k)(\cos q\theta_k)$$

であり, 余弦をすべて 1 にしたものは (8) と同じであることを注意しておく. この多項式の零根の絶対値が 1 より小さくなるための必要十分条件は

$$|A_{11}A_{22}(\cos p\theta_k)(\cos q\theta_k)| < 1 \quad (15)$$

$$1 - \{(A_{11} + A_{12}A_{21})(\cos p\theta_k) + A_{22}(\cos q\theta_k)\} + A_{11}A_{22}(\cos p\theta_k)(\cos q\theta_k) > 0 \quad (16)$$

$$1 + \{(A_{11} + A_{12}A_{21})(\cos p\theta_k) + A_{22}(\cos q\theta_k)\} + A_{11}A_{22}(\cos p\theta_k)(\cos q\theta_k) > 0 \quad (17)$$

が満たされることである. 線形安定性を第 2 節で議論したときに不等式 (9) があったので, $\cos p\theta_k, \cos q\theta_k \leq 1$ から, (15) は満たされていることがわかる. $p = 3, q = 1$ の場合に (16) および (17) の左辺をそれぞれ変形すると

$$4A_{11}A_22\eta^4 - 4(A_{11} + A_{12}A_{21})\eta^3 - 3A_{11}A_22\eta^2 + (3A_{11} + 3A_{12}A_{21} - A_{22})\eta + 1 \quad (18)$$

$$4A_{11}A_22\eta^4 + 4(A_{11} + A_{12}A_{21})\eta^3 - 3A_{11}A_22\eta^2 - (3A_{11} + 3A_{12}A_{21} - A_{22})\eta + 1 \quad (19)$$

となる. ただし, $\eta := \cos \theta_k$ とした. (18) と (19) は η の偶数次の係数は同じで奇数次の係数は異符号となっており, この対称性から $|\eta| \leq 1$ において, 一方が正になれば他方も正になることが従う. そこで, (18) が $|\eta| \leq 1$ における符号を a, b の値を変えて調べた. 方法は, それぞれの a, b の値に対する $|\eta| \leq 1$ における 4 次式 (18) が表す曲線を数式処理ソフトで描くというものである. 具体的な a, b の値は

$$(a, b) = (0.01, 0.03), (\alpha, \alpha + 0.03), \\ (0.01, 0.04), (\alpha, \alpha + 0.04)$$

である. ただし, α は 0.02 から 0.10 まで 0.01 刻みで動かす. これらのパラメータは, 第 2 節で示した図 2 および図 3 それぞれの時空パターンが切り替わる境目になっていることが図 8 からわかる.

実際に (18) の符号を調べた結果, 符号が常に正となった a, b の値は

$$(a, b) = (0.01, 0.03), (\alpha, \alpha + 0.03), (0.06, 0.10)$$

であった. Turing 不安定性によって, 図 2 および図 3 の時空パターンが, 例外を除いて切り替わっていることがわかった. 例外とは $(a, b) = (0.06, 0.10)$ の場合のことで, このパラメータにおける時空パターンは図 9 の様になる. 1 つのピークが 2 つのピークに分裂し, 互いに反

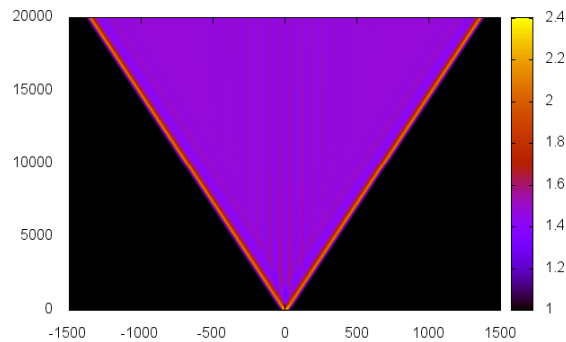


図 9 $(a, b) = (0.06, 0.10)$

対の方向に動き, ある程度ピーク同士が離れるとそれぞれ再びある程度の高さのピークときわめて低いピークの 2 つに分裂し, きわめて低いピークはその場に留まり, もう一方は一定の方向に動いていくという現象を繰り返している. この時空パターンは図 3 と類似したものと見なせるが, Turing 安定性の議論からは図 2 と類似したパターンであるとも見なせる. また, $(a, b) = (0.06, 0.10)$ の場合の $|\eta| \leq 1$ における 4 次式 (18) の表す曲線は図 10 および図 11 の様になる. 図 11 からこの場合の (18) の η を動かしたときの極小値はほとんど 0 になっている

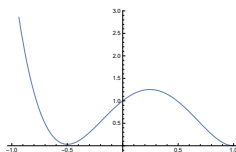


図 10 $(a, b) = (0.06, 0.10)$ の場合の (18) の表す曲線

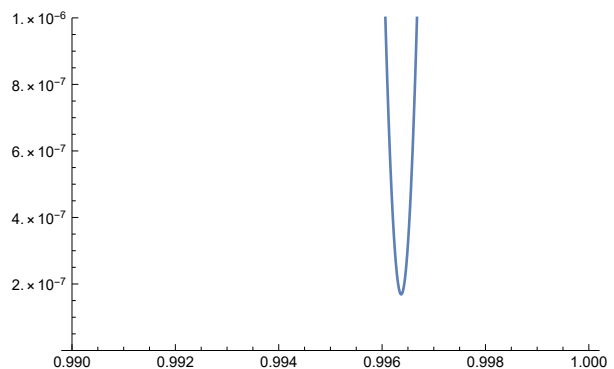


図 11 図 10 の極小の部分拡大したもの

ことがわかる. このことから, 図 2 のパターンおよび図 3 のパターンのどちらとも見なせる中間のパターンが出ていることには何かしらの関連性があるのではないかと考えられるが未だ詳細は分かっていない.

5 まとめと今後の課題

本稿では [3] で得られていた離散 Gray-Scott モデルを紹介し, Turing 不安定性によって離散 Gray-Scott モデルの解が示す一部の時空パターンが切り替わることを見出した. また, [4] で報告した離散化の手法による反応拡散系の離散化に対して [2] と類似した手法を用いることで Turing 不安定性の議論ができることを確認できた. ただ, Turing 不安定がおこる条件をパラメータで具体的に書き直すことが未だ出来ていない. パラメータに関する条件を導出することは今後の課題である. 今回の議論は, 連続系の言葉で述べると, 拡散係数を固定した場合のものであり, 拡散係数が一般すなわち, パラメータ p, q が一般の正整数の場合にどうなるかも未だ明らかになっていない. さらに, p, q が一般の場合の Turing 不安定性と連続系の対応についても明らかにしていきたい. また, Turing 不安定性によって 2 種類のパターンのどちらとも見なせる中間のパターンが出てきているメカニズムの解明も今後の課題としたい.

参考文献

- [1] P. Gray and S. K. Scott, Sustained oscillations and other exotic patterns of behaviour in isothermal reactions, *J. Phys. Chem.*, **89** (1985), 22–32.
- [2] Y. T. Han, B. Han, L. Zhang, L. Xu, M. F. Li and G. Zhang, Turing instability and wave patterns for a symmetric discrete competitive Lotka-Volterra system, *WSEAS Trans. Math.*, **10** (2011), 181–189.
- [3] K. Matsuya and M. Murata, Spatial pattern of discrete and ultradiscrete Gray-Scott model, *Discrete Continuous Dyn. Syst. Ser. B*, **20** (2015), 173–187.
- [4] K. Matsuya and T. Tokihiro, Existence and non-existence of global solutions for a discrete semilinear heat equation, *Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. A*, **31** (2011), 209–220.
- [5] W. Mazin, K. E. Rasmussen, E. Mosekilde, P. Borckmans and G. Dewel, Pattern formation in the bistable Gray-Scott model, *Math. Comput. Simulat.*, **40** (1996), 371–396
- [6] Y. Nishiura and D. Ueyama, A skeleton structure of self-replicating dynamics, *Physica D*, **130** (1999), 73–104.
- [7] Y. Nishiura and D. Ueyama, Spatio-temporal chaos for the Gray-Scott model, *Physica D*, **150** (2001), 137–162.

(原稿提出: 2018 年 1 月 8 日; 修正稿提出: 2018 年 2 月 21 日)