Discritization of a Nonlocal Nonlinear Evolution Equation

ある非局所非線形発展方程式の差分化

Discritization of a Nonlocal Nonlinear Evolution Equation

薩 摩 順 吉[1]
Junkichi Satsuma
友 枝 明 保[2]
Akiyasu Tomoeda

概要

交通流の渋滞現象の一つの流体模型として、Burgers 方程式によるものがある。ある見方をすると、Burgers モデルでは他車の認識距離が無限大であると考えられる。ここでは、認識距離が実質的に有限と考えられる連続体モデルと、数値計算を行うための差分方程式を提案する。連続体モデルは特異積分をふくむ非局所非線形発展方程式で記述されるが、リーマンヒルベルトの手法を用いると、複素領域での差分を用いて表すことができ、得られる差分方程式は実軸および虚軸方向への差分式で与えられる。また、Burgers 方程式同様、線形化でき、厳密な解析が可能である。

1 はじめに

交通流現象を記述する数理モデルの一つに次のような Burgers 方程式を用いた流体モデルがある [1, 2]。

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + V_0\Big(1 - 2\frac{\rho}{\rho_{\max}}\Big)\frac{\partial \rho}{\partial x} = D\frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} \tag{1}$$

ここで、ρ はある時刻 t における場所 x での交通密度 $\rho(x,t)$ を表し、V_0 と $\rho_{\max}$ はそれぞれ密度が限りなく小さい（車がほとんどいない）状況で走行する車の最高速度と車が完全に停止してしまう際の密度を表す定数である。また、拡散係数 D も定数である。この数理モデル構築の出発点は車の台数の保存則であり、その保存則に対して速度と密度の関係式 [3] を仮定することで、密度で閉じた時間発展方程式が得られる。さらに、線形性からくる特異性を解消するために拡散項を導入し、得られた方程式が (1) で記述される Burgers 方程式である。とくに、V_0 で移動する座標系への変数変換によって移流項は消すことができることを注意しておく。

ある見方をすると、Burgers モデルでは他車の認識距離が無限大であると考えられる。本論文では、認識距離が実質的に有限と考えられる連続体モデルと、数値計算を行うための差分方程式を提案する。第 2 章では、Burgers モデルに対する一つの見方を説明し、第 3 章で、Burgers モデルの改良と考えられる非局所モデルを提案し、その解法について議論する。第 4 章では非局所モデルに対する差分化についてコメントするとともに今後の課題を述べる。

---

[1] 武蔵野大学工学部数理工学科 教授 / 武蔵野大学数理工学センター員
[2] 武蔵野大学工学部数理工学科 准教授 / 武蔵野大学数理工学センター員

2　Burgers モデルの一つの見方

Burgers 方程式は以下の形で表すことができる。

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}\Big[\int_{-\infty}^{\infty}K(x-y)u(y)dy\cdot u(x)\Big]-D\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0 \tag{2}$$

ただし，$X=x-y$ としたときの $K(X)$ は積分核であり、図 1 のようなものとする。

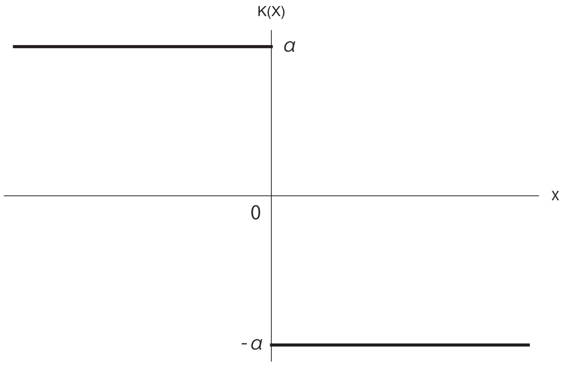

図 1　積分核の関数形

積分核を具体的に描くと、(2) は

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\alpha\frac{\partial}{\partial x}\Big[\Big\{I-2\int_{-\infty}^{x}u(y)dy\Big\}u(x)\Big]-D\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0 \tag{3}$$

ただし、$I=\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}u(x)dx$ であり、$u(x)$ は境界条件 $u(\pm\infty)=0$ を持つ図 2 のような形とする。

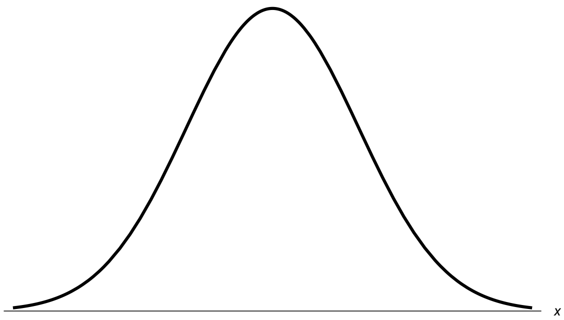

図 2　$u(x)$ の形

いま、$v(x)$ を $v(x)=\displaystyle\int_{-\infty}^{x}u(y)dy$ とおき、(3) を $v(x)$ で表すと、

$$\frac{\partial v}{\partial t}+\alpha I\frac{\partial v}{\partial x}-2\alpha v\frac{\partial v}{\partial x}-D\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}=0 \tag{4}$$

となる。この式は本質的に Burgers 方程式 (1) と同じである。

例えば、$u(x)$ を生物集団の個体数と考えた時、(3) の積分核を含む項は仲間を認識し群れをなす効果を与える [4]。Burgers モデルの場合、積分核の形からその認識は無限遠まで同等であると考えることができる。交通流の場合も、同様の見方が可能である。

3　非局所モデル

この章では、認識距離が実質的に有限とみなせるモデルを提案し、その解について議論する。そのモデルは非線形内部波を記述する方程式との関連で提出されたもので、以下のような非局所非線形微差分方程式である [5], [6]。

$$\frac{\partial u}{\partial t} - k\frac{\partial}{\partial x}\Big[⨍_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{2\delta}\coth\frac{\pi}{2\delta}(x-y)u(y)dy\cdot u(x)\Big] - D\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \tag{5}$$

ただし、積分記号 $⨍$ はコーシーの主値積分を表す。積分核は $K(x) = -\dfrac{1}{2\delta}\coth\dfrac{\pi x}{2\delta}$ であり、概形は図 3 のようになる。

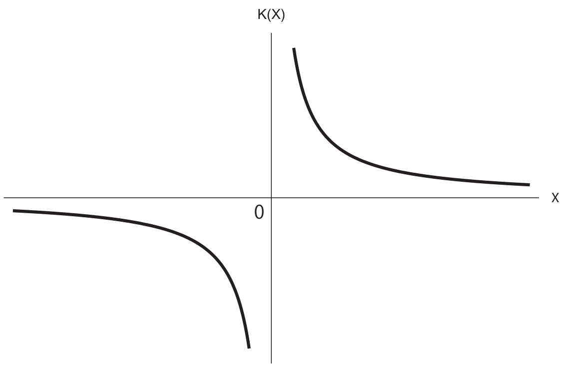

図 3　提案モデルの積分核の形

このモデルは $\delta \to 0$ において Burgers 方程式となる。また、$\delta \to \infty$ のとき、積分核は Hilbert 核になる。図 3 からわかるように、認識距離は指数関数的に減少し、実質的に有限であると考えられる。この方程式は線形化可能であり、厳密解を得ることができる [5]。その過程を簡単に紹介しておこう。

まず、複素関数 $U(z)$

$$U(z) = \int_{-\infty}^{\infty} K(z-y)u(y)dy \tag{6}$$

で定義する。この複素関数の複素平面上、上からの極限をとったものを U^+, 下からの極限をとったものを U^- と書くと、それぞれ

$$U^{\pm}(x) = ⨍_{-\infty}^{\infty} K(x-y)u(y)dy \pm iu(x) \tag{7}$$

と表される。なお、$U^-(x) = U^+(x+2i\delta)$ となることに注意する。

(7) を用いると、(5) は

$$\frac{\partial}{\partial t}(U^- - U^+) - D\frac{\partial^2}{\partial x^2}(U^- - U^+) + \frac{k}{2}\frac{\partial}{\partial x}\Big[(U^- + U^+)(U^- - U^+)\Big] = 0 \tag{8}$$

と書き換えられる。変数変換

$$U^\pm(x) = -\frac{2D}{k}\frac{\partial}{\partial x}\Big\{\log f^\pm(x)\Big\} + \frac{I}{2\delta} \tag{9}$$

を導入しよう。ただし、$I = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} u(x)dx$ であり、境界条件として、$x \to \pm\infty$ のとき、$u \to 0$ を課している。(7) と (9) から

$$u(x) = -i\frac{D}{k}\frac{\partial}{\partial x}\Big\{\log\frac{f^-(x)}{f^+(x)}\Big\} \tag{10}$$

が得られる。なお、$f^\pm(x)$ は単一の関数 $f(x)$ を用いて、$f^\pm(x) = f(x \mp i\delta)$ と書けることに注意する。これらの変数変換により、(8) は

$$(\frac{\partial}{\partial t}f^- - D\frac{\partial^2}{\partial x^2}f^- + \frac{kI}{2\delta}\frac{\partial}{\partial x}f^-)/f^- - (\frac{\partial}{\partial t}f^+ - D\frac{\partial^2}{\partial x^2}f^+ + \frac{kI}{2\delta}\frac{\partial}{\partial x}f^+)/f^+ = 0 \tag{11}$$

と変形される。したがって、$f^\pm$ が

$$\frac{\partial}{\partial t}f^\pm - D\frac{\partial^2}{\partial x^2}f^\pm + \frac{kI}{2\delta}\frac{\partial}{\partial x}f^\pm \quad = 0 \tag{12}$$

を満たしていれば、(10) で与えられる $u(x)$ は (5) の解となる.

(12) は線形拡散方程式であり、様々な手法を用いて、厳密な解を構成することができる。したがって、(5) の初期値問題の解を求めるためには、まず初期値 $u(x,0)$ から (10) を用いて、$f^\pm(x,0)$ を求め、(12) から $f^\pm(x,t)$ を得て、再び、(10) から $u(x,t)$ を構成すればよい。

論文 [5], [6] では、定常解として

$$u(x) = \frac{Dp\sin p\delta}{k(\cosh px + \cos p\delta)} \tag{13}$$

が存在することを示し、このパルスを二つ離れて置いた初期値をとったとき、$0 < p\delta < \pi/2$ のときは時間の経過とともに一体化して、

$$u(x,\infty) = \frac{Dp\sin 2p\delta}{k(\cosh 2px + \cos 2p\delta)} \tag{14}$$

のパルスになり、$p\delta = \pi/2$ のときは無限時間で爆発し、$\pi/2 < \pi$ のときは有限時間で爆発することを示している。

4　数値計算に向けて

本論文では、交通流の解析を目的として、認識距離が実質的に有限であり、Burgers 方程式の拡張となる非局所非線形方程式を提出した。この方程式は線形化可能であるが、広いクラスの初期値に対する初期値問題を解くためには、微積分方程式の差分化が不可欠となる。ここでは次の差分化を提案する。線形化に用いた変数 $f(x,t)$ に対して、時間については前進差分、

$$f_t = \frac{f(x,t+\Delta t) - f(x,t)}{\Delta t} \tag{15}$$

(16)

をとる。また、空間については中心差分をとる。例えば拡散項に含まれる 2 階微分については

$$f_{xx} = \frac{f(x+\Delta x,t) - 2f(x,t) + f(x-\Delta x,t)}{(\Delta x)^2} \tag{17}$$

とする。

今後、この差分化を用いて、交通流にかかわる初期値問題を解き、渋滞などに関する新しい知見を得ることを課題としたい。また、数学的には複素関数の差分化を考察する必要があり、そうした方向の研究になにがしかの貢献をしたいと考えている。

5　謝辞

本研究は JSPS 科研費基盤研究 (C)(No.16K05048) および (No. 17K05147) の助成を受けたものである。

参考文献

[1] M. J. Lighthill and G. B. Whitham, Proc. R. Soc. A 299 (1955), 317.

[2] G. B. Whitham, Linear and Nonlinear Waves (John Wiley and Sons, New York, 1974)

[3] B. D. Greenshields, Proceedings of the Highway Research Board, Washington D.C., 14 (1935), 448.

[4] 三村 昌泰, 物性研究 40 (2) (1983), 254

[5] J. Satsuma, J. Phys. Soc. Japan 50 (1981), 1423.

[6] J. Satsuma and M. Mimura, J. Phys. Soc. Japan 54 (1985), 894

(原稿提出: 2018 年 2 月 19 日)