Discretization of Hutchinson-Wright equation

Hutchinson-Wright 方程式の離散化

Discretization of Hutchinson-Wright equation

松 家 敬 介[1]
Keisuke Matsuya

概要

ロジスティック方程式に時間遅れを入れた Hutchinson-Wright 方程式は生物種の数が時間遅れの効果を伴って生物種の増減に影響を及ぼす数理モデルとして知られている．本稿では Hutchinson-Wright 方程式の離散化を 2 種類提案する．それぞれの離散化には微分方程式と同じく二つの平衡解があり, それぞれの平衡解の安定性について考察する．

1 はじめに

$u := u(t),\ t \geq 0$ とする．ロジスティック方程式:

$$\frac{du}{dt} = u(1-u)\ (t \geq 0) \tag{1}$$

は生物種や人口の増減の数理モデルとして知られている．(1) の微分を差分商に置き換えて得られる自然な離散化は, $\delta > 0,\ n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ として

$$\hat{u}_{n+1} = \hat{u}_n + \delta \hat{u}_n (1 - \hat{u}_n) \tag{2}$$

である．May[3] によって, (2) はカオスを与える解をもつことが知られている．また, (1) に対して, 可積分性を保存した離散化として

$$u_{n+1} = \frac{1+\delta}{1+\delta u_n} u_n \tag{3}$$

が森下 [4] によって提案されている．ここで, 可積分性を保存した離散化とは, (2) は厳密解をもち、差分間隔のパラメータ δ によらずに (1) の解を保存していることを指している．本稿では, $v := v(t),\ t \geq 0,\ T > 0$ とし, (1) に時間遅れを加えた常微分方程式:

$$\frac{dv}{dt} = v(1 - v(t-T))\ (t \geq T) \tag{4}$$

の離散化について議論したい．(4) は生物種の増減の数理モデルであり, 生物種の数が時間遅れの効果を伴って生物種の増減に影響を及ぼすモデルとなっている．この時間遅れをもつ微分方程式による数理モデルは生態学者である Hutchinson[1] によって提案された．また, ほぼ同じ時期に (4) を始めとする時間遅れをもつ常微分方程式の平衡解の線形安定性が Wright[7] によって調べられている．この二人の名前をとって, (4) は Hutchinson-Wright 方程式と呼ばれ

[1] 武蔵野大学数理工学センター員 / 武蔵野大学工学部数理工学科講師

る．本稿では, (4) の離散化として, (2) および (3) のそれぞれに類似したものを提案する．さらに (4) と二種類の離散方程式の解の挙動の違いについて議論する．

2 Hutchinson-Wright 方程式

本節では (4) の解, 特に平衡解の挙動についてまとめる．この内容は Wright[7] によって明らかにされたものである．(4) は, $v \equiv 0$ および $v \equiv 1$ を平衡解にもつ．$v \equiv 0$ は不安定な平衡解である．これは (4) を $v \equiv 0$ のまわりで線形化した方程式が

$$\frac{d\tilde{V}}{dt} = \tilde{V}$$

となり, その特性方程式 $\lambda = 1$ の根の実部が正であることからわかる．また, $v \equiv 1$ に対しては次の定理が成り立つ．

定理 1 (4) の平衡解 $v \equiv 1$ は以下の性質をもつ．

1. $T < \pi/2$ のとき局所漸近安定な平衡解.

2. $T > \pi/2$ のとき不安定な平衡解.

証明 (4) を $v \equiv 1$ の周りで線形化した方程式は以下のようになる．

$$\frac{dV}{dt} = -V(t-T)$$

この線形微差分方程式の特性方程式は

$$\lambda = -e^{-T\lambda} \tag{5}$$

となり, 安定性を議論するために, この方程式の解の実部の符号を調べる．
まず, この方程式の実数解は必ず負となる．したがって, あとは虚数解の実部を調べるだけとなる．そこで $\lambda = a + bi$ として a, b が満たす関係式を求めると次が得られる．

$$\begin{cases} a + e^{-aT}\cos(bT) = 0 \\ b - e^{-aT}\sin(bT) = 0 \end{cases}$$

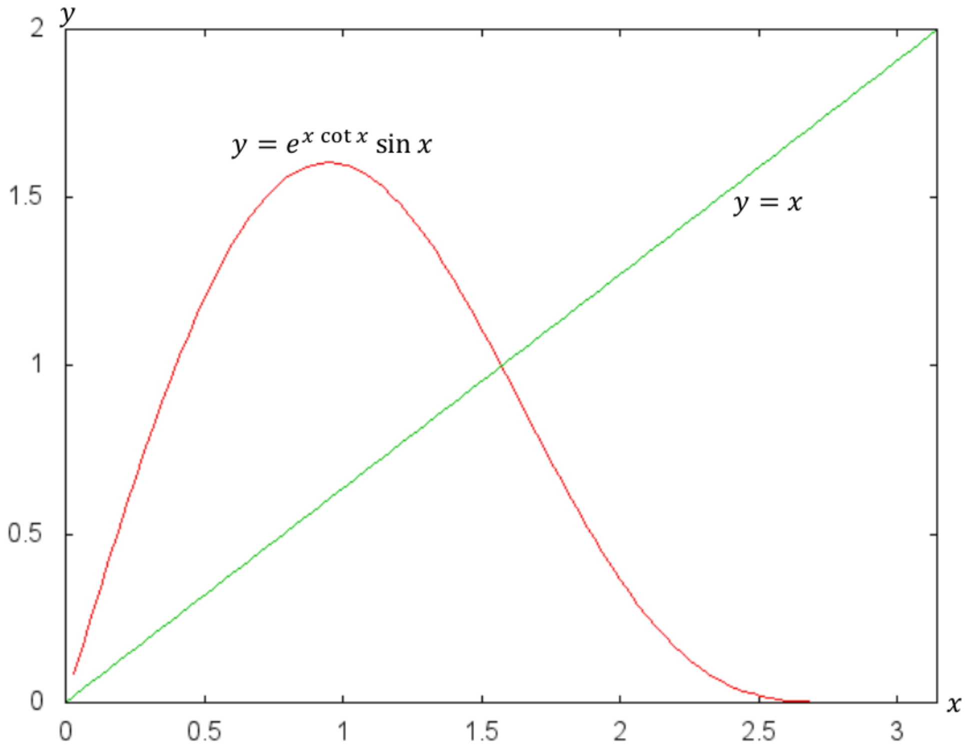
さらに,

$$b = e^{bT\cot(bT)}\sin(bT)$$

ここで, $a+bi$ が (5) の解であれば, $a-bi$ も解となるので $b > 0$ において考えても一般性が失われない．$e^{bT\cot(bT)}\sin(bT)$ の符号を考えると b は必ず区間 $[2k\pi/T, (2k+1)\pi/T]$ $(k \in \mathbb{Z}_{\geq 0})$ にあることが分かる．さらに,

$$e^{x\cot x}\sin x \leq 1 \ \ (x \in [(2k+1/2)\pi, (2k+1)\pi],\ k \in \mathbb{Z}_{\geq 0})$$

であることと $y = x$ および $y = e^{x\cot x}\sin x$ の区間 $[0, \pi]$ のグラフが



となっていることから定理の主張が従うことが分かる.

3 (4) の離散化

$n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, $N \in \mathbb{Z}_{>0}$, $\delta > 0$ とする. (4) の微分を差分商に置き換えて得られる自然な離散化は

$$\hat{v}_{n+1} = \hat{v}_n + \delta \hat{v}_n (1 - \hat{v}_{n-N}) \tag{6}$$

である. 一方, [5, 6] から得られる離散化は次のような差分方程式である.

$$v_{n+1} = \frac{1+\delta}{1+\delta v_{n-N}} v_n \tag{7}$$

この差分方程式は森下差分の形を変えたものにもなっている. (6) および (7) はそれぞれ $v \equiv 0$ および $v \equiv 1$ を平衡解にもつ. $v \equiv 0$ がともに不安定な平衡解になることは (4) と類似している。これは (6) および (7) を $v \equiv 0$ のまわりで線形化した方程式が, 共に

$$\tilde{V}_{n+1} = (1+\delta)\tilde{V}_n$$

となり, その特性方程式 $\lambda = 1 + \delta$ の根の絶対値が 1 より大きいことから分かる. 一方, もう一つの平衡解 $v \equiv 1$ の安定性については異なる状況が見られる. (6) および (7) を $v \equiv 0$ のまわりで線形化した方程式は次のようになる.

$$\hat{V}_{n+1} = \hat{V}_n - \delta \hat{V}_{n-N}$$
$$V_{n+1} = V_n - \frac{\delta}{1+\delta} V_{n-N}$$

それぞれの線形化した方程式の特性方程式は

$$\lambda^{N+1} - \lambda^N + \Delta = 0 \tag{8}$$

という形をしており, $\Delta(>0)$ の形が異なっている. $v \equiv 1$ の安定性を調べるには, (8) の解の絶対値がすべて 1 より小さくなるかを調べる必要がある. これに関して, 次の命題 [2] が成り立つ.

命題

(8) の任意の解の絶対値は 1 より小さくなるための必要十分条件は以下の不等式が成り立つことである.

$$\Delta < 2\cos\frac{N\pi}{2N+1}$$

$f_\Delta(\lambda) := \lambda^{N+1} - \lambda^N + \Delta$ とする. この命題を証明するために, まず, 次の補題を示す.

補題

$$\Delta \leq \frac{N^N}{(N+1)^{N+1}}$$

とする. このとき, (8) の解は一つだけ絶対値が区間 $[N/(N+1), 1)$ にあるものが存在し, それ以外の解の絶対値は $N/(N+1)$ 以下となる.

証明　$f_\Delta(N/(N+1)) \leq 0,\ f_\Delta(1) = \Delta > 0,\ f'_\Delta(\lambda) > 0\ (N/(N+1) \leq \lambda \leq 1)$ から前半の主張が従う.

また, 後半の主張は背理法を用いる. すなわち, (8) の解 $\lambda = re^{i\theta}$ であって, $r > N/(N+1),\ 0 < \theta < 2\pi$ を満たすものが存在すると仮定し, 矛盾を導く. (8) の解は Δ に関して連続的に変化することと $f_0(\lambda) = 0$ の解は $\lambda = 0$(重複度 N) と $\lambda = 1$ に注意すると仮定から $f_{\Delta_0}(Ne^{i\theta}/(N+1)) = 0$ を満たす $0 < \Delta_0 \leq< N^N/(N+1)^{N+1}$ および $0 < \theta < 2\pi$ が存在することになる. そこで θ, Δ_0, N が満たす関係式は以下のようになる.

$$\begin{cases} \dfrac{N}{N+1}\cos\theta = 1 - \dfrac{\Delta_0(N+1)^N}{N^N}\cos N\theta \\ \dfrac{N}{N+1}\sin\theta = \dfrac{\Delta_0(N+1)^N}{N^N}\sin N\theta \end{cases}$$

これらより,

$$\cos N\theta = \frac{\left(\frac{N+1}{N}\right)^N \Delta_0^2 + \frac{N^N(2N+1)}{(N+1)^{N+2}}}{2\Delta_0} \leq 1$$

$$\left\{\frac{N^N}{(N+1)^{N+1}} - \Delta_0\right\}\left\{\frac{2N+1}{N+1} - \left(\frac{N+1}{N}\right)^N \Delta_0\right\} \leq 0$$

が得られる. しかし, 最後の不等式は $0 < \Delta_0 \leq N^n/(N+1)^{N+1}$ から矛盾することが分かり, 補題の証明が完了する.

この補題で $\Delta = N^N/(N+1)^{N+1}$ において (8) の解はすべて単位円内に存在していることが分かる.

証明　命題の証明

共役な複素数はともに (8) の解になることから, $f_\Delta(e^{i\theta}) = 0$ を満たす $0 < \theta \leq \pi$ が存在するような Δ の値を考える. このとき, θ, Δ, N が満たす関係式は以下のようになる.

$$\begin{cases} \cos\theta = 1 - \Delta\cos N\theta \\ \sin\theta = \Delta\sin N\theta \end{cases}$$

これらから,

$$\begin{aligned} \Delta &= 2\cos N\theta \\ e^{i\theta} &= -e^{-2iN\theta} \\ \theta &= \frac{2k+1}{2N+1}\pi\ (k = 0, \ldots, N) \end{aligned}$$

ここまでの計算から Δ を大きくしていき, $f_\Delta(\lambda) = 0$ が初めて絶対値が 1 になるような解をもつ Δ の値は, $2\cos N\pi/(2N+1)$ ということが分かり, 命題の仮定の不等式が成り立てば (8) の任意の解の絶対値は 1 より小さくなる.

さらに, (8) の解を $re^{i\theta}$ としたとき, r, θ は Δ の関数と考えられ, $r = 1$ であるときに $dr/d\Delta > 0$ を示すことで命題の証明が完了する. これは, Δ を大きくしていくことで単位円の外にいた解が単位円の中に戻ることがないということを言っている. これまでと同様に r, θ, Δ, N が満たす関係式は以下のようになる.

$$\begin{cases} r^N\{r\cos(N+1)\theta - \cos N\theta\} + \Delta = 0 \\ r\sin(N+1)\theta - \sin N\theta = 0 \end{cases}$$

ここでも $0 < \theta < \pi$ としておいても一般性は失われない.

$$\sin N\theta = \sin(N+1)\theta,\ \cos N\theta = -\cos(N+1)\theta$$
$$\sin\theta = \sin 2N\theta,\ \cos\theta = -\cos 2N\theta$$
$$\Delta = \frac{r^N\sin\theta}{\sin(N+1)\theta} > 0$$

に注意して, $r = 1$ の下で

$$\begin{aligned} \frac{dr}{d\theta} &= (2N+1)\cot N\theta \\ \frac{d\Delta}{d\theta} &= \frac{d}{d\theta}\frac{r^N\sin\theta}{\sin(N+1)\theta} \\ &= \frac{N\sin\theta}{\sin N\theta}\frac{dr}{d\theta} + \frac{\cos\theta}{\sin N\theta} + \frac{(N+1)\sin\theta}{\sin N\theta}\cot N\theta \\ &= \frac{\sin\theta}{\sin N\theta}\left\{\left(2N^2 + 2N + \frac{1}{2}\right)\cot N\theta + \frac{1}{2}\tan N\theta\right\} \end{aligned}$$

が得られる. 以上から, $r=1$ の下で

$$\frac{dr}{d\Delta} = \frac{dr}{d\theta} \Bigg/ \frac{d\Delta}{d\theta} > 0$$

これで命題の証明が完了した.

この命題から, 次の定理が成り立つ.

定理 2 (6) および (7) の平衡解 $v \equiv 1$ はそれぞれ,

$$\delta < 2\cos\frac{N\pi}{2N+1} \quad \text{i.e.} \quad N < \frac{\cos^{-1}\frac{\delta}{2}}{\pi - 2\cos^{-1}\frac{\delta}{2}}$$

$$\frac{\delta}{\delta+1} < 2\cos\frac{N\pi}{2N+1} \quad \text{i.e.} \quad N < \frac{\cos^{-1}\frac{\delta}{2(\delta+1)}}{\pi - 2\cos^{-1}\frac{\delta}{2(\delta+1)}} (=: N_0)$$

が満たされるときに局所漸近安定となる.

$$\lim_{\delta\to+0}\frac{\delta\cos^{-1}(\Delta/2)}{\pi - 2\cos^{-1}(\Delta/2)} = \frac{\pi}{2} \quad \left(\Delta = \delta \text{ または } \frac{\delta}{\delta+1}\right)$$

となることから, この定理は (4) の場合の離散類似となっている.
また, $2\cos\dfrac{N\pi}{2N+1} \geq \dfrac{1}{2}$ なので, (6) の平衡解 $v \equiv 1$ が漸近安定な解となるような N が存在するためには差分間隔 δ に対して $\delta < \dfrac{1}{2}$ という条件を付け加える必要がある.

4 まとめと今後の課題

本稿では, ロジスティック方程式に時間遅れを入れた Hutchinson-Wright 方程式の離散化について考察した. 離散化は (6) および (7) の 2 種類を提案し, それぞれの二つの平衡解の局所的な安定性についても考察した. その結果, (7) に対しては, 一つの平衡解はいつも不安定でもう一つの平衡解は時間遅れのパラメータ N に依存して安定性が変わることが分かった. この結果は (4) と類似した結果である. また, (6) に対しては, 一つの平衡解はいつも不安定であることは (7) および微分方程式と類似した結果になったが、もう一つの平衡解は時間遅れのパラメータ N に依存して安定性が変わるためには差分間隔 δ の値に制限を課す必要があることも分かった. 差分間隔 δ によって解の構造が変化してしまうことから, (6) よりも (7) を (4) の離散化と見なすことが妥当であると言える. ただ, 今回提案した離散化 (7) がなぜ差分間隔を変化させても平衡解の安定性が変化しないのかについては明らかにされていない. さらには, (7) 以外の離散化でもこのように平衡解の安定性を保存するものがあっても不思議なことではない. どの様な方針で離散化を行えばよいかについては今後の課題としたい. また, 今回扱った安定性は局所的なものであって, 大域的な安定性については扱わなかった. これは (4) でも未解決の問題であり, 次の予想 [8] が知られている.

予想 1　$T < \pi/2$ とする．このとき, (4) の解 $v(t)$ に対して次が成り立つ.

$$\lim_{t \to +\infty} v(t) = 1$$

(7) に対してこの予想の離散類似に対応する問題:

予想 2　$N < N_1$ とする．このとき, (7) の解 v_n に対して次が成り立つ.

$$\lim_{n \to +\infty} v_n = 1$$

が成立の可否について検討することは今後の課題である．さらに (7) は引き算が含まれない形となっているため, 超離散化可能な方程式となっている．(7) を超離散化し, 得られた方程式の解の解析も今後の課題としたい.

参考文献

[1] G. E. Hutchinson, “Circular causal systems in ecology”, Ann. N. Y. Acad. Sci. 50(1948) 221–246.

[2] S. A. Levin and R. M. May, “A note on Difference-Delay Equations”, Theoret. Population Biol. 9(1976) 178–187.

[3] R. M. May, “Simple mathematical models with very complicated dynamics”, Nature 261(1976) 459–467.

[4] M. Morishita, “The fitting of the logistic equation to the rate of increase of population density”, Res. Popul. Ecol. VII(1965) 52–55.

[5] M. Murata, J. Satsuma, A. Ramani, B. Grammaticos, “How to discretize differential systems in a systematic way”, J. Phys. A: Math. Theor. 31(2010), 315203, 15pp.

[6] M. Murata, “Tropical discretization: ultradiscrete Fisher-KPP equation and ultradiscrete Allen-Cahn equation”, J. Difference. Equ. Appl. 19(2013), 1008–1021.

[7] E. M. Wright, “The stability of solutions of non-linear difference-differential equations”, Proc. Roy. Soc. Edinburgh 63(1950) 18–26.

[8] E. M. Wright, “A non-linear difference-differential equation”, J. Reine Angew. Math. 194(1955) 66–87.

(原稿提出: 2016 年 11 月 30 日; 修正稿提出: 2017 年 1 月 31 日)