

## The $n=0$ bound state of an electron in one-dimensional attractive Coulomb potential

メタデータ	言語: jpn 出版者: 公開日: 2017-06-13 キーワード (Ja): キーワード (En): 作成者: 阿部, 修治 メールアドレス: 所属:
URL	<a href="https://mu.repo.nii.ac.jp/records/539">https://mu.repo.nii.ac.jp/records/539</a>

# 1次元クーロン引力ポテンシャル中の電子の $n=0$ 束縛状態

## The $n=0$ bound state of an electron in one-dimensional attractive Coulomb potential

阿部 修治<sup>1</sup>

Shuji Abe

### 概要

1次元クーロン引力ポテンシャル中の電子の量子状態には、 $n=0$ 状態と呼ばれる特異な束縛状態があり、その固有エネルギーが負の無限大になるという発散問題がある。この問題をできるだけ正確に取り扱うための極限操作を複数のモデルで検討した。その結果、この状態はモデルによらず、1次元クーロンポテンシャルにおいて頑強に存在する状態であることが確かめられた。

### 1. クーロン引力による電子の束縛状態と次元性

量子力学によって記述される水素原子モデルの電子状態、すなわちクーロン引力ポテンシャル中の電子のエネルギー固有状態は主量子数  $n = 1, 2, 3, \dots$  で規定され、 $n = 1$  が最低エネルギー状態である。このようなクーロンポテンシャルに束縛された電子の系は、半導体などの物質中においても、不純物原子の束縛状態、電子と正孔の束縛状態（励起子）など、数多く存在する。一方、半導体の量子閉じ込め系や層状物質、有機高分子など、電子状態の次元性が実質的に3次元から2次元や1次元に制限される場合がある。1次元に近い系としては、強磁場中の電子系[1]、直鎖共役高分子系[2,3]、半導体の量子細線[4]、カーボンナノチューブ[5]などがある。こうした1次元系においてはクーロン相互作用が特異な効果をもち、量子数  $n = 1$  の状態よりも低いエネルギーに“ $n = 0$ 束縛状態”が存在し、たとえば励起子の光吸収や非線形光学応答などの光学的スペクトルに特異な影響を及ぼすことが知られている[2,3]。

この特異性は、1次元におけるクーロンポテンシャルの原点での発散が絡んでおり、数学的には微妙な問題である。 $n = 0$ とは束縛エネルギーが無限大になること[6]、つまり、電子は負の無限大のエネルギーを持つということを意味しており、まるでブラックホールのように、電子はクーロンポテンシャルの底なしの深みに落ち込むということである。一方、このような状態は数学的に許されないという主張もある[7]。現実の系では原点での発散が抑制されているので問題にならないが、この論文では数学的な側面に焦点を当て、果たしてこのような状態が本当に存在すると言えるのか、存在するとしたらどんな条件の下で存在するのかについて、あらためて考察する。

---

<sup>1</sup> 武蔵野大学数理工学センター員 / 武蔵野大学工学部数理工学科特任教授

## 2. 1次元クーロン引力ポテンシャルのモデル

まず、1次元クーロン引力ポテンシャルの1電子モデル（1次元水素原子モデル）の基本解についてまとめておく．ここで扱うのは電子の波動関数 $\Psi(x)$ に対する Schrödinger 方程式

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} \Psi + V(x)\Psi = E\Psi \quad (2.1)$$

である． $x$ は電子の座標， $m$ は電子の質量， $V(x)$ はポテンシャルエネルギー， $E$ は電子のエネルギーである．1次元クーロン引力ポテンシャルとは

$$V(x) = -\frac{\sigma}{|x|} \quad (2.2)$$

の形のポテンシャルをいう．ここで $\sigma(>0)$ はクーロン引力ポテンシャルの強さを表し、水素原子モデルの場合は $\sigma = e^2/4\pi\epsilon_0$ である（ $e$ は素電荷， $\epsilon_0$ は真空誘電率）．式(2.1), (2.2)で与えられるモデルの解は次のようにして求められる．

方程式を簡単にするために、特徴的長さ

$$a_0 = \frac{\hbar^2}{m\sigma} \quad (2.3)$$

と特徴的エネルギー

$$E_1 = \frac{m\sigma^2}{2\hbar^2} = \frac{\sigma}{2a_0} \quad (2.4)$$

を導入する．また、束縛状態のエネルギー $E(<0)$ の固有状態を表す無次元変数として

$$\alpha = \sqrt{\frac{E_1}{|E|}} \quad (2.5)$$

を定義する( $\alpha \geq 0$ )．座標変数も無次元化して

$$z = \frac{2}{\alpha a_0} x \quad (2.6)$$

に変換し（ $z$ は実数）， $\Psi(x) = u(z)$ と書くと、方程式(2.1)は次の形になる．

$$\frac{d^2}{dz^2} u + \left( \frac{\alpha}{|z|} - \frac{1}{4} \right) u = 0 \quad (2.7)$$

これは $z > 0$ において合流型超幾何微分方程式の一つである Whittaker の方程式

$$\frac{d^2}{dz^2} u + \left( \frac{\alpha}{z} - \frac{1}{4} + \frac{\frac{1}{4} - \mu^2}{z^2} \right) u = 0 \quad (2.8)$$

で $\mu = \frac{1}{2}$ と置いた場合であり、解は Whittaker 関数

$$u(z) = W_{\alpha, \frac{1}{2}}(z), \quad (z > 0) \quad (2.9)$$

で与えられる[8,9]. 以下, 添字の $\frac{1}{2}$ を省略して $W_\alpha(z)$ と書くことにする.

方程式(2.7)の解は,  $z > 0$ での解 $W_\alpha(z)$ と $z < 0$ での解 $W_\alpha(-z)$ との $z = 0$ での接続条件から決まる. 結果から言うと,  $\alpha$ は正の整数 $n$ でなければならないことになり, その場合, Whittaker 関数は

$$W_n(z) = \frac{1}{n} e^{-\frac{z}{2}} z L_{n-1}^{(1)}(z) \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (2.10)$$

となる. ここで

$$L_{n-1}^{(1)}(z) = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \binom{n-1-k}{k} \frac{z^k}{k!} \quad (2.11)$$

は Laguerre の多項式である. 方程式(2.7)の解は各 $n$ に対して偶(even)と奇(odd)の状態があり, 偶状態を $n+$ , 奇状態を $n-$ と表すと,

$$u_{n+}(z) = W_n(|z|) \quad (2.12)$$

$$u_{n-}(z) = \text{sgn}(z)W_n(|z|) \quad (2.13)$$

である. いずれも $u_{n\pm}(0) = 0$ であることに注意する. 固有エネルギーは式(2.5),(2.4)より,

$$E_n = -\frac{E_1}{n^2} = -\frac{m\sigma^2}{2\hbar^2} \frac{1}{n^2} \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (2.14)$$

となる. これは3次元水素原子モデルの固有エネルギーと同じである. 違いは状態の縮退度であり, 3次元の場合は $n$ が大きくなるほど縮退度が増えるのに対して, 1次元の場合はすべての $n$ に対して2重縮退である.

式(2.12), (2.13)の解は $z = 0$ でどのように接続しているかを詳しく見てみる. 式(2.11)において $z = 0$ の近傍で

$$L_{n-1}^{(1)}(z) = n - \frac{n(n-1)}{2}z + O(z^2) \quad (2.15)$$

なので, 式(2.10)より

$$W_n(z) = z - \frac{n}{2}z^2 + O(z^3) \quad (2.16)$$

である. よって $z \rightarrow \pm 0$ のとき

$$u_{n+}(z) = |z| - \frac{n}{2}z^2 + O(z^3) \quad (2.17)$$

$$u_{n-}(z) = z - \frac{n}{2}z|z| + O(z^3) \quad (2.18)$$

であり, とともに $z = 0$ で連続である. これらが $z \rightarrow \pm 0$ で方程式(2.7) ( $\alpha = n$ としたもの)を満足することは直ちに確かめられる.  $z = 0$ において, 偶状態(2.17)は $u_{n+}'(z)$ が不連続で $u_{n+}''(z)$ が連続, 一方, 奇状態(2.18)は $u_{n-}'(z)$ が連続で $u_{n-}''(z)$ が不連続である.

形式的には境界条件を満足する方程式(2.7)の解はこれだけである. 上述の" $n = 0$ "の状態も含めて, これら以外の解は存在しない[7]. 実際, もし $\alpha = 0$ とすると, 方程式(2.7)

ないし(2.8)は

$$\frac{d^2}{dz^2}u - \frac{1}{4}u = 0 \quad (2.19)$$

となり, これは

$$u = e^{\pm \frac{z}{2}} \quad (2.20)$$

の形の解しか持たず,  $z$ の全範囲 ( $-\infty$ から $+\infty$ まで) で規格化可能な波動関数は存在しない.  $\alpha$ が正の整数の場合と異なり,  $z = 0$ での $u'(z)$ の不連続性は許されないからである. しかしながら, このことをもって" $n = 0$ "の状態は存在しないと結論づけるのは早計である.  $\alpha = 0$ とすると, そもそも座標変換の式(2.6)が定義できないのだから, もとの方程式(2.1)に結びつけて論ずることができない.

### 3. カットオフのあるクーロンポテンシャル

最初に述べた" $n = 0$ "状態は, クーロンポテンシャルが現実の系では式(2.2)の形からずれ, 原点付近での発散が抑えられていることに伴って現れる. そこで, クーロンポテンシャルにカットオフ長 $\xi (> 0)$ を導入し, 以下の3種類のモデルを考える (図1).

$$(I) \quad V(x) = -\frac{\sigma}{|x| + \xi} \quad (3.1)$$

$$(II) \quad V(x) = \begin{cases} -\frac{\sigma}{|x|} & (|x| \geq \xi) \\ -\frac{\sigma}{\xi} & (|x| < \xi) \end{cases} \quad (3.2)$$

$$(III) \quad V(x) = \begin{cases} -\frac{\sigma}{|x|} & (|x| \geq \xi) \\ u_0 (> 0) & (|x| < \xi) \end{cases} \quad (3.3)$$

従来, (I), (II)のモデルが主に使われてきたが, あえて原点付近に斥力ポテンシャルを置いたモデル(III)も今回考えることにする. (I)から(III)のいずれの場合も, ポテンシャルの最も深い所は  $V(\xi) = -\sigma/\xi$  である. これが $n = 1$ 状態のエネルギー (式(2.14)の $E_1$ ) よりも十分低い状況を考えるので,  $\xi \ll 2a_0$ という条件を課す. そこで,

$$\lambda = \frac{\xi}{a_0} \ll 1 \quad (3.4)$$

というカットオフの無次元パラメタを導入する.

仮に $E_1$ より低いエネルギーに束縛状態があるとしても, そのエネルギー $E$ がポテンシャルの底  $V(\xi)$  以下になることはないので,  $|E| < \sigma/\xi$  であり, 式(2.4),(2.5)から

$$\alpha > \sqrt{\lambda/2} \quad (3.5)$$

でなければならない. ゆえに $\lambda \rightarrow 0$ のとき, 仮に $\alpha$ が0に近づくとしても  $\lambda^{\frac{1}{2}}$  よりもゆっ

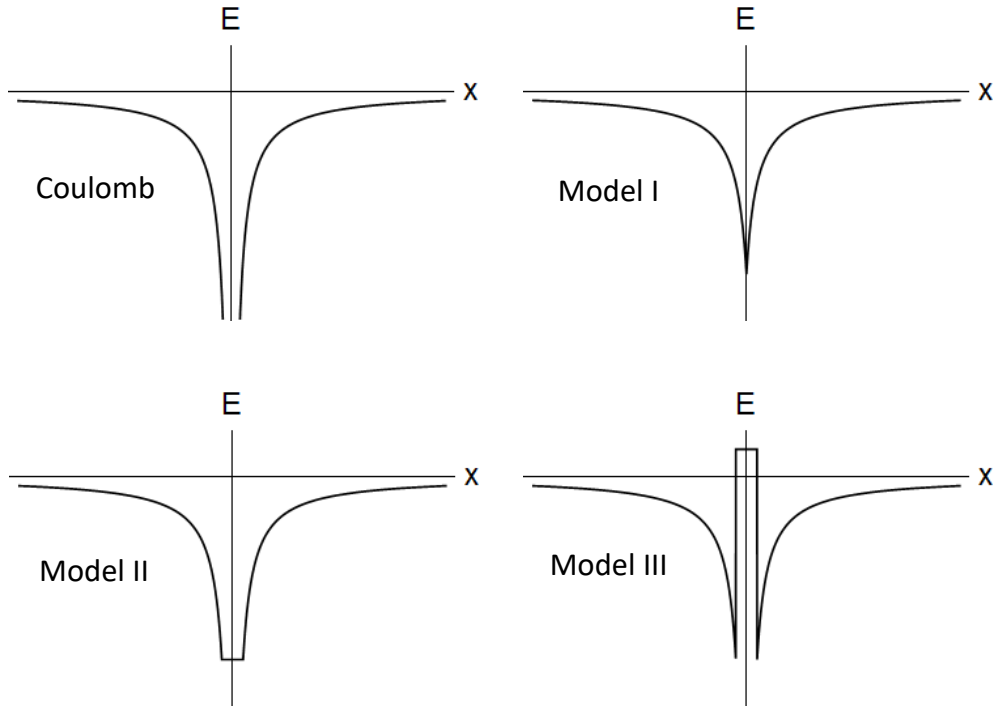


図 1. 純粋のクーロンポテンシャル, および3種類のカットオフのあるクーロンポテンシャルのモデル

くり 0 に近づく, つまり

$$\alpha \geq O(\lambda^{\frac{1}{2}}) \quad (\lambda \rightarrow 0) \quad (3.6)$$

であることに留意する.

式(3.1)-(3.3)のような発散のないポテンシャルにした場合, 波動関数  $\Psi(x)$  とその導関数  $\Psi'(x)$  は全領域で連続であり, ポテンシャルの形が変わる境界点での接続条件で固有エネルギーが決まる. モデル(I)の場合,

$$z = \frac{2}{\alpha a_0} (|x| + \xi) \quad (3.7)$$

という座標変換により,  $x > 0$ ,  $x < 0$  それぞれの領域における解は  $W_\alpha(z)$  となる.

$$z_0 = \frac{2\lambda}{\alpha} \quad (3.8)$$

と定義すると, 境界  $x = 0$  は  $z = z_0$  に対応し, 接続条件は偶状態の場合

$$W'_\alpha(z_0) = 0 \quad (3.9)$$

であり, 奇状態の場合は  $W_\alpha(z_0) = 0$  である. 式(3.5), (3.4)より

$$z_0 = \frac{2\lambda}{\alpha} < 2\sqrt{2\lambda} \ll 1 \quad (3.10)$$

であり,

$$z_0 \leq O(\lambda^{\frac{1}{2}}) \quad (\lambda \rightarrow 0) \quad (3.11)$$

であることに注意する.

モデル(II)の場合,  $|x| \geq \xi$ における解は $W_\alpha(z)$ で,  $|x| < \xi$ での解は定在波 $\Psi = \sin kx$ ,  
ないし $\Psi = \cos kx$ の形である. ここに $k$ は

$$\frac{\hbar^2 k^2}{2m} = E + \frac{\sigma}{\xi} = \frac{\sigma}{\xi} - \frac{E_1}{\alpha^2} \quad (3.12)$$

により $\alpha$ と関係している. この式の右辺は $\sigma/\xi$ より大きくなることはなく, 式(2.3)を使う  
と,  $k^2 \leq 2/(a_0 \xi)$ となり, さらに式(3.4)より,  $\xi \rightarrow 0$ のとき $k\xi \ll 1$ である.  $z = z_0$ での境  
界接続条件は, 偶奇それぞれの状態に対して,

$$\frac{2}{a_0 \alpha} \frac{W'_\alpha(z_0)}{W_\alpha(z_0)} = \begin{cases} -k \tan k\xi & (\text{even}) \\ k \cot k\xi & (\text{odd}) \end{cases} \quad (3.13)$$

である.

ポテンシャル(III)の場合も同様だが,  $|x| < \xi$ での $E < 0$ の解は指数関数 $\Psi = \sinh \kappa x$ ,  
ないし $\Psi = \cosh \kappa x$ の形である. ここで

$$\frac{\hbar^2 \kappa^2}{2m} = u_0 - E = u_0 + \frac{E_1}{\alpha^2} \quad (3.14)$$

である.  $\xi \rightarrow 0$ のとき  $\kappa \sim 1/(a_0 \alpha) = \lambda/(\alpha \xi)$ であり, 式(3.5)より  $\kappa \xi \ll 1$ となる. この場  
合の境界接続条件は, 偶奇それぞれの状態に対して,

$$\frac{2}{a_0 \alpha} \frac{W'_\alpha(z_0)}{W_\alpha(z_0)} = \begin{cases} \kappa \tanh \kappa \xi & (\text{even}) \\ \kappa \coth \kappa \xi & (\text{odd}) \end{cases} \quad (3.15)$$

である.

固有エネルギー $E_n$ は式(2.14)から少しずれ, 縮退も解けるが, いずれの場合も $\xi \rightarrow 0$   
の極限で式(2.14)に一致する. 以下ではこれらの解以外の, よりエネルギーの低い状態,  
すなわち,  $0 < \alpha < 1$ の解の存在についてのみ検討する.

Whittaker 関数 $W_\alpha(z)$ は Kummer の関数 $U(a, b, z)$ を用いて

$$W_\alpha(z) = W_{\alpha, \frac{1}{2}}(z) = e^{-\frac{z}{2}} z U(1 - \alpha, 2, z) \quad (3.16)$$

と書かれる[8,9].  $U(a, b, z)$ に対する公式から,  $U(1 - \alpha, 2, z)$ は $z$ の小さいところでは次の  
級数展開で計算することができる.

$$U(1 - \alpha, 2, z) = \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \left\{ M(\alpha, z) \ln z + Q(\alpha, z) - \frac{1}{\alpha z} \right\} \quad (3.17)$$

$$M(\alpha, z) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(1 - \alpha)_m}{(m + 1)! m!} z^m \quad (3.18)$$

$$Q(\alpha, z) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(1 - \alpha)_m}{(m + 1)! m!} \left\{ \psi(m + 1 - \alpha) - 2\psi(m + 1) - \frac{1}{m + 1} \right\} z^m \quad (3.19)$$

1次元クーロン引力ポテンシャル中の電子の  $n=0$  束縛状態 (阿部) ここで、 $\Gamma(y)$ はガンマ関数、 $\psi(y) = \Gamma'(y)/\Gamma(y)$  はダイガンマ (ポリガンマ) 関数であり、

$$(a)_m = a(a+1)\cdots(a+m-1), \quad (a)_0 = 1$$

は Pochhammer 記号である. Kummer の関数は  $z$ の大きいところでは積分表示

$$U(1-\alpha, 2, z) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^\infty e^{-zt} t^{-\alpha} (1+t)^\alpha dt \quad (3.20)$$

を使って計算できる.

式(3.17)および(3.20)を用いて  $W_\alpha(z)$ を計算した例を図 2 に示す.  $\alpha = 0.25$ の場合について、 $z < 0.9$ では式(3.17)、 $z > 0.7$ では式(3.20)を用いて mathematica で数値計算し、両者の重なる領域では少なくとも 6 桁の精度で一致することを確認めた.  $0 < \alpha < 1$ のとき、グラフの形状は基本的には変わらず、 $W_\alpha(z)$ は常に正で、微分係数  $W'_\alpha(z)$ が正から負に変わる極大点が存在する.  $z \gg 1$ での漸近形は

$$W_\alpha(z) \sim e^{-\frac{z}{2}} z^\alpha \quad (3.21)$$

である. 式(3.16)-(3.19)において  $z \ll 1$ のとき、

$$W_\alpha(z) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} (1 - \alpha z \ln z) + O(z) \quad (3.22)$$

である.  $W'_\alpha(z)$ の主要項を求めると

$$W'_\alpha(z) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \left\{ \alpha \left( 1 - \frac{\alpha}{2} z \right) \ln z + \frac{1}{2} + \alpha \psi(1-\alpha) - 2\alpha \gamma \right\} + O(z) \quad (3.23)$$

となる. ただし、 $\psi(1) = -\gamma$ を使った.  $\gamma = 0.57721 \dots$ はオイラーの定数である. 式(3.22),(3.23)より、 $z \rightarrow +0$ の極限では  $W_\alpha(z) \rightarrow 1/\Gamma(1-\alpha) > 0$ 、 $W'_\alpha(z) \rightarrow +\infty$  である.  $z \ll 1$ のとき、式(3.23)で  $W'_\alpha(z) = 0$  となる条件は、 $z$ 、 $\alpha$ の高次項を無視すれば

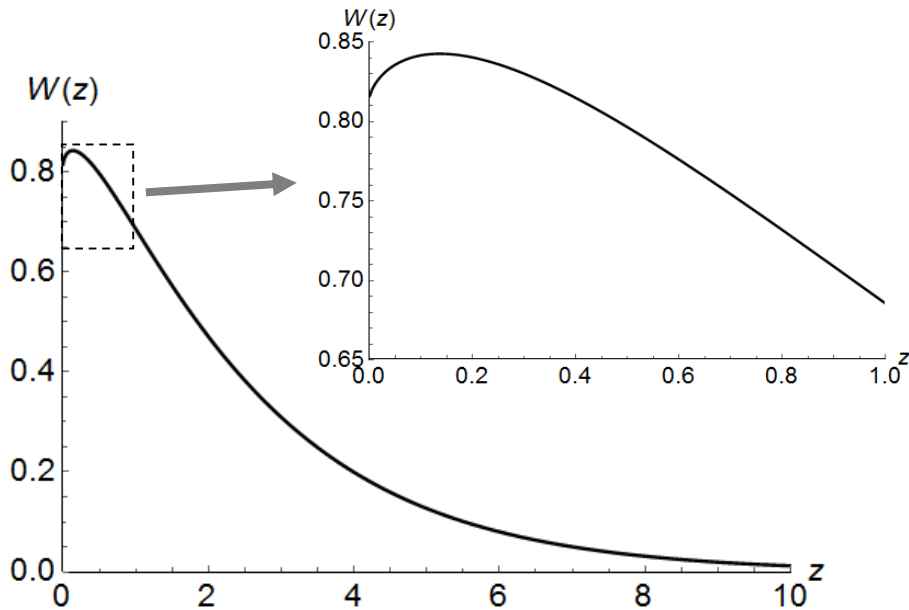


図 2.  $\alpha = 0.25$ に対する  $W_\alpha(z)$ のグラフとその一部を拡大したもの



$$\alpha \ln z + \frac{1}{2} = 0 \tag{3.24}$$

という方程式になり，これを満たすのは

$$z = z_1 = \exp\left(-\frac{1}{2\alpha}\right) \tag{3.25}$$

においてである． $\alpha \ll 1$ ならば確かに $z_1 \ll 1$ である． $W_\alpha(z)$ の関数形は， $z = 0$ で1に近い正の値であり， $z$ とともに増加し， $z = z_1$ ですぐに極大となり，その後，単調に減少する．極大値は

$$W_\alpha(z_1) \cong \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \left(1 + \frac{1}{2} e^{-\frac{1}{2\alpha}}\right) \tag{3.26}$$

であり，ほとんど $W_\alpha(0)$ に近い値である．こうした特徴は図2のグラフからも見て取れる．

この関数は $W_\alpha(z) = 0$ となる点がないので，接続により連続な奇関数を作ることは不可能である．ゆえに，構成可能なのは偶状態のみである．ゆえに，以下では偶状態の接続条件について考える．

モデル(I)の場合，式(3.9)の偶状態の接続条件 $W'_\alpha(z_0) = 0$ は，式(3.24)と式(3.8)より

$$\lambda = \frac{\alpha}{2} \exp\left(-\frac{1}{2\alpha}\right) \tag{3.27}$$

となる．この右辺を $\alpha$ の関数としてみると単調増加であり， $\alpha$ と $\lambda$ は一対一対応し， $\alpha \rightarrow +0$ のとき $\lambda \rightarrow +0$ である．ゆえに，逆に $\lambda$ の関数として一意に $\alpha$ が決まり， $\lambda \rightarrow +0$ のとき $\alpha \rightarrow +0$ となることが分かる．つまり，どんなにカットオフ $\lambda$ を小さくとっても，境界接続条件(3.9)を満たす偶関数の解がただ一つ必ず存在する．これが最初に述べた， $\alpha \rightarrow 0$ すなわち $n = 0$ の状態にほかならない． $n = 0$ の状態は， $n \geq 1$ の状態と異なり，偶(+)の状態のみである．

モデル(II)の場合，式(3.13)の接続条件は， $k\xi \ll 1$ のとき，

$$z_0 \left( \alpha \ln z_0 + \frac{1}{2} \right) = -k^2 \xi^2 \tag{3.28}$$

となり，式(3.12)を使うと

$$\alpha \ln\left(\frac{2\lambda}{\alpha}\right) + \frac{1}{2} = -\frac{\alpha}{2} + \frac{\lambda}{2\alpha} \tag{3.29}$$

という方程式になる． $\lambda \rightarrow +0$ のとき，式(3.29)は $\alpha \rightarrow +0$ でなければ満たすことができない ( $\alpha$ の極限值が0でなく正の値だとすると左辺は $-\infty$ に発散する)． $\alpha \rightarrow +0$ ならば，式(3.6)も考慮すると，式(3.29)の右辺は負の側から0に収束し，左辺に比べて無視することができるので，結局，接続条件はモデル(I)の場合と同じ式(3.27)になる．ゆえに，この場合も $n = 0$ 状態が解として存在する．

モデル(III)の場合も同様に，式(3.15)の接続条件は

$$z_0 \left( \alpha \ln z_0 + \frac{1}{2} \right) = \kappa^2 \xi^2 \tag{3.30}$$

となり，式(3.14)から

$$\alpha \ln\left(\frac{2\lambda}{\alpha}\right) + \frac{1}{2} = \frac{\lambda}{2\alpha} \quad (3.31)$$

となるが、(II)の場合と同様、右辺は正の側から 0 に収束するので無視でき、接続条件はモデル(I)の場合と同じ式(3.27)になる。ゆえに、この場合もやはり  $n = 0$  状態が存在することが確かめられた。

以上、3種類の異なるカットオフのモデルで検討したが、いずれもカットオフ長  $\xi$  をゼロに近づけていくと、 $\alpha$  を決める方程式は極限で一致することが分かった。原点付近に斥カポテンシャルを置いた場合でも同じである。つまり、 $\alpha$  のゼロへの近づき方、あるいは束縛エネルギー  $|E|$  の無限大への発散のしかたは、カットオフのモデルによらず常に同じ漸近的ふるまいをする。

この  $n = 0$  状態の波動関数は、式(3.21)より、 $z \sim 1$  程度の広がりを持っている。式(2.6)から、もとの座標  $x$  での波動関数  $\Psi$  の局在長は  $\sim \alpha a_0$  程度であるということになる。当然、 $\alpha \rightarrow 0$  でこの局在長も 0 に近づくが、注目すべき点は、式(3.10)より、局在長とカットオフ長の比は  $\alpha a_0 / \xi = \alpha / \lambda \gg 1$  ということである。つまり、 $n = 0$  状態は  $\xi \rightarrow 0$  とともに原点の近傍に局在した状態になるものの、カットオフ領域  $|x| \lesssim \xi$  に局在するわけではなく、むしろ圧倒的にその外側に存在しているのである。上のモデル(III)の斥カポテンシャルによっても  $n = 0$  状態がほとんど影響されないのはこのためであると解釈できる。

今回検討した範囲で唯一、 $n = 0$  状態が存在しえないのは、モデル(III)のポテンシャルで  $u_0 = +\infty$  とする場合である。この場合、 $|x| < \xi$  の領域で波動関数は存在せず(つまり、電子はこの領域をまったく透過できず)、境界条件は  $W_\alpha(z_0) = 0$  となり、上で述べたようにこれを満たす解はない。ただし、これは  $\xi \rightarrow 0$  の極限で  $x > 0$  (または  $x < 0$ ) の片側だけのクーロンポテンシャルの問題になり、もとの問題とはポテンシャルが異なるので、検討から除外すべきものである。

#### 4. 結論

1次元クーロン引カポテンシャルの  $n = 0$  束縛状態の存在条件について考察した。純粋のクーロンポテンシャルの場合にはその状態を明示的に記述することはできないが、原点付近でポテンシャルのカットオフを導入して、それをゼロに持っていく極限操作をすると、 $n = 0$  状態が存在することを確認した。この状態は原点付近に斥カポテンシャルを置いた場合でも必ず存在し、その極限のふるまいもモデルによらず一定であることから、どんなカットオフのモデルを用いても  $n = 0$  の状態は頑強 (ロバスト) に存在するものと考えられる。波動関数がカットオフ長で局在しているわけではないことから、 $n = 0$  状態はカットオフによって出現した状態ではなく、やはり 1次元クーロンポテンシャルに固有の状態であるというべきである。

#### 参考文献

- [1] R. J. Elliot and R. Loudon, Theory of the absorption edge in semiconductors in a high magnetic field, J. Phys. Chem. Solids 15 (1960), 196-207.

- [2] S. Abe, Exciton versus interband absorption in Peierls insulators, *J. Phys. Soc. Jpn.* 58 (1989), 62-65.
- [3] S. Abe, Excitonic effects in the linear and nonlinear optical properties of conjugated polymers, in *Primary Photoexcitations in Conjugated Polymers*, N. S. Sariciftci, ed., World Scientific (1997), Chap. 5.
- [4] T. Ogawa and T. Takagahara, Optical absorption and Sommerfeld factors of one-dimensional semiconductors: An exact treatment of excitonic effects, *Phys. Rev. B* 44 (1991), 8138-8156.
- [5] T. Ando, Excitons in carbon nanotubes, *J. Phys. Soc. Jpn.* 66 (1997), 1066-1073.
- [6] R. Loudon, One-dimensional hydrogen atom, *Amer. J. Phys.* 27 (1959), 649-655.
- [7] H. N. Núñez-Yépez, A. L. Salas-Brito, and D. A. Solis, Quantum solution for the one-dimensional Coulomb problem, *Phys. Rev. A* 83 (2011), 064101.
- [8] L. J. Slater, Confluent hypergeometric functions, in *Handbook of Mathematical Functions*, M. Abramowitz and I. A. Segun, eds., Dover (1965), Chap. 13.
- [9] 犬井鉄郎, 『特殊関数』(岩波全書 252), 岩波書店(1962).

(原稿提出: 2016年12月10日; 修正稿提出: 2017年1月31日)