離散半線形熱方程式の爆発解とそのDirichlet問題

離散半線形熱方程式の爆発解とその Dirichlet 問題

Blow-up solutions for the discrete semilinear heat equation and its Dirichlet problem

松 家 敬 介[1]

Keisuke Matsuya

概要

爆発解とは, 急激な増加現象を示す微分方程式の解の一種である. 非線形項がべき乗の形をした半線形熱方程式 (SLH) は爆発解をもつことが知られており, さらに SLH の Cauchy 問題に爆発解が存在する条件に関する先行研究もある. これまでの研究で SLH の離散化であって, 爆発解の離散類似をもつものが得られており, さらに SLH の Cauchy 問題と同様の議論も出来ている. 本稿では, これまでの研究で得られている SLH の離散化について解説した後に SLH の Dirichlet 問題に対応する差分方程式の初期値境界値問題について議論し, 初期条件が十分に小さいときに差分方程式の解が爆発しないことを示した.

1 はじめに

本稿では, 以下の差分方程式：

$$f_n^{s+1} = \frac{g_n^s}{\left\{1-\alpha\delta\left(g_n^s\right)^{\alpha}\right\}^{1/\alpha}} \qquad \left(s\in\mathbb{Z}_{\geq 0},\ n\in\Omega_D^{\circ}\right) \tag{1}$$

に対して, 初期条件及び境界条件：

$$f_n^0 = a_n \qquad \left(n\in\Omega_D\right), \tag{2}$$

$$f_n^s = 0 \qquad \left(s\in\mathbb{Z}_{>0},\ n\in\partial\Omega_D\right) \tag{3}$$

を与えた初期値境界値問題について考察する. ただし, $\alpha>0,\ \delta>0,\ e_k\in\mathbb{Z}^d$ を第 k 成分が 1 の単位ベクトルとし,

$$g_n^s := \frac{1}{2d}\sum_{k=1}^{d}\left(g_{n+e_k}^s + g_{n-e_k}^s\right) \qquad \left(s\in\mathbb{Z}_{\geq 0},\ n\in\mathbb{Z}^d\right)$$

とする. また, $\Omega_D\subset\mathbb{Z}^d$ とし,

$$\Omega_D^{\circ} := \left\{n\in\Omega_D \middle|\, {}^{\forall}k,\ n\pm e_k\in\Omega_D\right\},\ \partial\Omega_D = \Omega_D\setminus\Omega_D^{\circ}$$

とする. さらに, 初期条件 a_n は非負かつ恒等的に零ではないものとする. (1) は以下の半線形熱方程式：

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \Delta f + f^{1+\alpha} \qquad \left(t\geq 0,\ x\in\Omega_C^{\circ}\right) \tag{4}$$

[1] 武蔵野大学数理工学センター員 / 武蔵野大学工学部数理工学科講師

の離散化として [1] で報告されている．ただし，$f := f(t,x)$ $(t \geq 0,\ x \in \mathbb{R}^d)$，$\Delta$ は d 次元のラプラシアンとし，Ω_C° は $\mathbb{R}^d$ におけるある領域 Ω_C の内点の集合とする．実際に，(1) は

$$f_n^{s+1} = g_n^s + \delta \left(g_n^s\right)^{1+\alpha} + O\left(\delta^2\right) \qquad (\delta \to 0)$$

と変形でき，$f_n^s = f(\delta s, \xi n)$，$\xi := \sqrt{2d\delta}$，$\delta s = t$，$\xi n = x$ として極限 $\delta \to 0$ をとると (4) が得られる．この結果から，本稿では (1) を離散半線形熱方程式と呼ぶ．

(4) は，藤田宏氏 [2] を始めとして解析されてきた偏微分方程式である．特に，この偏微分方程式には爆発解と呼ばれる特徴的な解が存在する．例えば，(4) の初期条件として $f(0,x) \equiv a > 0$ を与えたとする．初期条件が x(空間) に依らないため，(4) の Δf の項が抜け落ちた常微分方程式の初期値問題：

$$\begin{cases} \dfrac{df}{dt} = f^{1+\alpha} \\ f(0) = a \end{cases} \tag{5}$$

を求めることで (4) の爆発解が得られる．実際に，(5) の解を求めると，

$$f(t) = \frac{\alpha^{-1/\alpha}}{\left(a^{-\alpha}\alpha^{-1} - t\right)^{1/\alpha}} \tag{6}$$

であり，(6) が表す曲線は

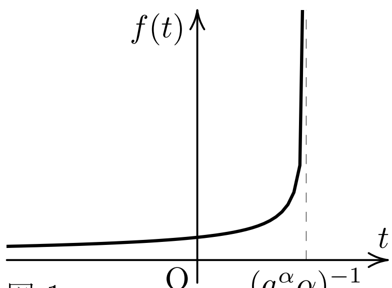

図 1

である．図 1 からも分かるように，(6) は t の値を左から $(a^\alpha \alpha)^{-1}$ に近づけると発散している．このように，ある点に近づくことで発散するような微分方程式の解を爆発解と呼ぶ．さらに，(6) が発散する t の値 $T := (a^\alpha \alpha)^{-1}$ を爆発時刻と呼び，「(6) は時刻 T で爆発する」と言う．(4) のような偏微分方程式の場合，爆発解は以下のように定義する．

定義 1　(4) の解 $f(t,x)$ に対して，

$$\lim_{t \to T-0} \sup_{x \in \Omega_C} |f(t,x)| = +\infty$$

をみたす $T > 0$ が存在するとき，$f(t,x)$ を爆発解，T を爆発時刻と呼び，「$f(t,x)$ は時刻 T で爆発する」という．

(4) は，その解 $f(t,x)$ がある時刻 t における位置 x の温度を表す方程式であるとみなすことも出来る．この場合，(4) の右辺の Δf の項は熱の拡散を表し，$f^{1+\alpha}$ は化学反応など何らかの理由による温度の上昇を表している．爆発解は，ある時刻，ある位置における温度の急激な上昇

を表したものとなっている．[2] では, (4) の Cauchy 問題すなわち, $\Omega_C = \mathbb{R}^d$ の場合における (4) の解が解析されている．その結果, 爆発解をもつ条件に関する以下の定理が知られている．

定理 1　(4) に対して, $\Omega_C = \mathbb{R}^d$ として, 初期条件として非負かつ恒等的に 0 ではない十分滑らかな関数 $a(x)$ が与えられたとする．すなわち,

$$f(0,x) = a(x) \qquad (x \in \mathbb{R}^d).$$

このとき, 以下が成り立つ.

1. $0 < \alpha < 2/d$ のとき, (4) の解はある時刻 T が存在してその時刻で爆発する．
2. $2/d < \alpha$ のとき, 初期条件 $a(x)$ が十分小さいと (4) の解は任意の時刻で爆発しない.

さらに, $\alpha = 2/d$ の場合は以下の定理が成り立つことも知られている.

定理 2　定理 1 の仮定に加えて, $\alpha = 2/d$ とする．このとき, (4) の解はある時刻 T が存在してその時刻で爆発する．

この定理は, Weissler ら [3, 4, 5] によって証明されている．これらの定理から, (4) の解が爆発する条件には, 初期条件 $a(x)$ と方程式に含まれるパラメータ α だけでなく, 独立変数 x が動く空間の次元も関係することがわかる．また, [1] では, (1) の爆発解の離散類似が与えられ, (4) の Cauchy 問題に対応した差分方程式の初期値問題について考察されており, 定理 1 および定理 2 の離散類似が得られている．一方, 偏微分方程式の初期値境界値問題の解析も応用上重要な問題の一つである．そのため, (1) に対しても初期値境界値問題に関する考察を行う必要がある．本稿では, (4) の Dirichlet 境界値問題に対応する初期値境界値問題を考察し, 爆発解の存在に関する定理を与えた.

本稿の構成は次の通りである．まず, (1) の爆発解を説明するために第 2 節で [1] の内容を概説する．次に, 第 3 節で (1) の初期値境界値問題と主定理を述べ, 第 4 節で主定理の証明を行う．そして, 第 5 節では本稿の結論と今後の課題を示す.

2　離散半線形熱方程式の爆発解

まず, (4) の爆発解は (1) のどの様な解として表れているのかについて考察する．(1) の差分方程式に対して (5) に対応する差分方程式の初期値問題は

$$\begin{cases} f^{s+1} = \dfrac{f^s}{\left\{1 - \alpha\delta\left(f^s\right)^\alpha\right\}^{1/\alpha}} \\ f^0 = a \end{cases} \tag{7}$$

であり, (7) の解は

$$f^s = \frac{\alpha^{-1/\alpha}}{\left(a^{-\alpha}\alpha^{-1} - \delta s\right)^{1/\alpha}} \tag{8}$$

で与えられる. (8) は, (6) の t を δs に置き換えることで (6) を離散化したものになっており, $s < (a^\alpha \alpha\delta)^{-1}$ をみたしながら s が増加すると f^s の値も増加していくこともわかる. (6) の爆発時刻に対応するものは, (8) では $s \geq (a^\alpha \alpha\delta)^{-1}$ をみたす $s\,(\in \mathbb{Z}_{\geq 0})$ の最小値である. この最小値を s_0 と書くことにすると, s_0 は

$$s_0 = \min\left\{s \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \,|\, f^s \geq (\alpha\delta)^{-1/\alpha}\right\}$$

と言い換えられる. $f^s \geq (\alpha\delta)^{-1/\alpha}$ という条件は (7) の差分方程式の右辺の分母の括弧の中が負になることを意味しており, (1) の爆発解の定義はこちらを採用することにする. つまり,

定義 2 (1) の解 f_n^s に対して, ある $s_0 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ が存在して, $g_n^s < (\alpha\delta)^{-1/\alpha}$ $(s < s_0,\ n \in \Omega_D^\circ)$ が成り立ち, さらに $\max_n g_n^{s_0} \geq (\alpha\delta)^{-1/\alpha}$ が成り立つとき, f_n^s を爆発解, s_0 を爆発時刻と呼び, 「f_n^s は時刻 s_0 で爆発する」という.

(4) の離散化は (1) に限らず様々なものが挙げられる. 例えば, (4) の差分法による離散化で標準的なものとして, $d = 1$ の場合,

$$\frac{f_n^{s+1} - f_n^s}{\delta} = \frac{f_{n+1}^s - 2f_n^s + f_{n-1}^s}{\xi^2} + (f_n^s)^{1+\alpha}$$

等がある. この離散化の場合, s が有限の値である限り f_n^s の値も有限である. このため, (4) の有限の時刻で起こる現象である解の爆発が見えづらくなってしまっている. したがって, この離散化と (1) の差分方程式とを比べると, (1) の差分方程式の方が (4) の爆発解の特徴をとらえやすくなっている. さらに, 先ほど定義した (1) の解の爆発に対しても定理 1 および定理 2 の離散類似である以下の定理 [1] が成り立つ.

定理 3 $\Omega_D = \mathbb{Z}^d$ とし, (1) に対して (2) を課す. このとき, 以下が成り立つ.

1. $0 < \alpha \leq 2/d$ のとき, (1) の解はある時刻 s_0 が存在してその時刻で爆発する.
2. $2/d < \alpha$ のとき, 初期条件 a_n が十分小さいと (1) の解は任意の時刻で爆発しない.

この定理から, 先ほど定義した (1) の爆発解が (4) の爆発解の離散類似であると言える.

3 主定理

本節では

$$\Omega_D = \left\{n = (n_1, \cdots, n_d) \in \mathbb{Z}^d | 0 \leq n_k \leq N_k\ (k = 1, \cdots, d)\right\} \tag{9}$$

とした場合における (1) の解について議論する. ただし, $N_k \in \mathbb{Z}_{>0}$ $(k = 1, \cdots, d)$ とする. 本節で考える差分方程式の初期値境界値問題は, (4) の Ω_C を滑らかな境界をもつ領域としたときの Dirichlet 境界値問題に対応している. すなわち, (4) に対して

$$\begin{aligned} f(0,x) &= a(x) && (x \in \Omega_C), \\ f(t,x) &= 0 && (t > 0,\ x \in \partial\Omega_C) \end{aligned}$$

を課した場合のことである．(4) の Dirichlet 境界値問題の解は, 初期条件 $a(x)$ を十分に小さくすると, 任意の有限の時刻で爆発しないことが知られている [2, §1]．この性質の離散類似：

定理 4 Ω_D が (9) で定義されるとし, (1) に対して (2) および (3) を課す．このとき, (1) の解は初期条件 a_n を十分小さくすると, 任意の有限の時刻で爆発しない．

が本稿の主定理である．

4 主定理の証明

簡単のために (1) において $(\alpha\delta)^{1/\alpha} f_n^s$ をあらためて f_n^s とする変数変換を行った

$$f_n^{s+1} = \frac{g_n^s}{\{1-(g_n^s)^\alpha\}^{1/\alpha}} \tag{10}$$

を扱う．さらに, (1) の解が任意の有限の時刻で爆発しないならば, (10) の解において $g_n^s < 1 \ \ (s \in \mathbb{Z}_{\geq 0},\ n \in \Omega_D)$ が成り立つ．したがって, 主定理は次の命題に言い換えられる．

命題 1 (1) の初期条件 a_n を十分小さくすると

$$g_n^s < 1 \qquad (s \in \mathbb{Z}_{\geq 0},\ n \in \Omega_D)$$

が成り立つ．

この命題は比較原理を用いて証明できる．まず, 次の線形差分方程式の初期値境界値問題:

$$\begin{cases} h_n^{s+1} = \dfrac{1}{2d}\displaystyle\sum_{k=1}^{d}\left(h_{n+e_k}^s + h_{n-e_k}^s\right) & (s \in \mathbb{Z}_{\geq 0},\ n \in \Omega_D^\circ) \\ h_n^0 = a_n & (n \in \Omega_D) \\ h_n^s = 0 & (s \in \mathbb{Z}_{>0},\ n \in \partial\Omega_D) \end{cases} \tag{11}$$

の解を h_n^s とする．さらに

$$\bar{f}_n^s := \frac{h_n^s}{\{1-\sum_{s'=0}^{s}(m_{s'})^\alpha\}^{1/\alpha}} \qquad (s \in \mathbb{Z}_{\geq 0},\ n \in \Omega_D)$$

とする．ただし,

$$m_s := \max_{n \in \Omega_D^\circ} h_n^s$$

とする．このとき, s に関する帰納法により次の補題が示される．

補題 1 ある $s_1 \in \mathbb{Z}_{>0}$ において $\sum_{s'=0}^{s_1}(m_{s'})^\alpha < 1$ が成り立っているとする．このとき,

$$\begin{aligned} g_n^s < 1 \qquad & (s \in \{0,1,\ldots,s_1-1\},\ n \in \Omega_D^\circ), \\ f_n^s \leq \bar{f}_n^s \qquad & (s \in \{0,1,\ldots,s_1\},\ n \in \Omega_D^\circ) \end{aligned}$$

が成り立つ．

この補題と類似したものは [1] でも挙げられている. この補題から, 命題を証明するには (11) の初期条件でもある a_n を十分に小さくとると

$$\sum_{s'=0}^{s} (m_{s'})^{\alpha} < 1 \qquad (s \in \mathbb{Z}_{\geq 0}) \tag{12}$$

が成り立つことを言えばよいことがわかる. また, (11) の解 h_n^s に関して次の補題が成り立つ.

補題 2 (11) の解 h_n^s は, ある定数 $B_{n'}$ $(n' \in \Omega_D^{\circ})$ の組を用いて,

$$h_n^s = \sum_{n' \in \Omega_D^{\circ}} \left\{ B_{n'} (c_{n'})^s \prod_{k=1}^{d} \sin\left(\frac{n'_k \pi}{N_k} n_k\right) \right\}$$

とただ一通りに書ける. ただし,

$$n = (n_1, \cdots, n_d)\,,\ n' = (n'_1, \cdots, n'_d)\,,\ c_{n'} := \frac{1}{d} \sum_{k=1}^{d} \cos\left(\frac{n'_k \pi}{N_k}\right)$$

とする.

証明

$$(c_{n'})^s \prod_{k=1}^{d} \sin\left(\frac{n'_k \pi}{N_k} n_k\right)$$

は (11) の初期条件を変えた場合の初期値境界値問題の解になっていることが直ちに確認できる. さらに, $B_{n'}$ たちが一意に定まることは, d に関する帰納法によって示される.

• $d = 1$ の場合

$N := N_1$ すると, $B_{n'}$ たちは, $N-1$ 個の未知変数 $(B_1, \ldots, B_{N-1})$ による $N-1$ 本の連立一次方程式 :

$$\sum_{n'=1}^{N-1} B_{n'} \sin\left(\frac{n'_k \pi}{N} n\right) = a_n \qquad (n = 1, \ldots, N-1)$$

を解くことで決定される. したがって, $B_{n'}$ たちが一意に定まるには, $N-1$ 個のベクトル ${}^t\left(\sin \frac{n'\pi}{N}, \ldots, \sin \frac{n'(N-1)\pi}{N}\right)$ $(n' = 1, \ldots, N-1)$ が一次独立であると言えればよい.

一方, これらの $N-1$ 個のベクトルは

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & 1 \\ 0 & \ldots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

という $N-1$ 次正方行列の固有値 $2\cos\frac{n'\pi}{N}$ に対応する固有ベクトルである. さらに, $1 \leq n' \leq N-1$ であることからこれらの固有値はすべて異なり, かつ $N-1$ 個あることから, $N-1$ 個

のベクトルたちは一次独立であることがわかる．したがって，$B_{n'}$ たちが一意に定まることが示された．

• $d \geq 2$ の場合

$B_{n'}$ たちは，任意の $n \in \Omega_D^\circ$ に対して

$$\begin{aligned} a_n &= \sum_{n' \in \Omega_D^\circ} B_{n'} \prod_{k=1}^{d} \sin\left(\frac{n'_k \pi}{N_k} n_k\right) \\ &= \sum_{n'_d=1}^{N_d-1} \sin\left(\frac{n'_d \pi}{N_d} n_d\right) \sum B_{n'} \prod_{k=1}^{d-1} \sin\left(\frac{n'_k \pi}{N_k} n_k\right) \end{aligned}$$

をみたさなければならない．ここで $n_1, \cdots, n_{d-1}$ を固定しておき n_d だけを動かしていくことで $d=1$ の場合の結果を用いることで $\sum B_{n'} \prod_{k=1}^{d-1} \sin\left(\frac{n'_k \pi}{N_k} n_k\right)$ の値が一意に定まることが従う．さらに，帰納法の仮定から $B_{n'}$ たちも一意に定まることが従う．

これから，a_n が十分に小さいときに (12) が成り立つかを調べるために，$\sum_{s'=0}^{\infty} |m_{s'}|^\alpha$ の評価を行う．以下では，

$$B := \max_{n' \in \Omega_D^\circ} |B_{n'}|$$

とする．B は $\max_n a_n$ を小さくすれば小さくなる量であることに注意する．

• $\alpha = 1$ の場合

$$\begin{aligned} \sum_{s'=0}^{\infty} |m_{s'}| &\leq \sum_{s'=0}^{\infty} B \sum_{n' \in \Omega_D^\circ} |c_{n'}|^{s'} \\ &= B \sum_{n' \in \Omega_D^\circ} \frac{1}{1 - |c_{n'}|} < \infty \end{aligned}$$

二行目の等式は $|c_{n'}| < 1$ であることを用いている．したがって，$\max_n a_n$ を小さくすることで $\sum_{s'=0}^{\infty} |m_{s'}| < 1$ と出来る．

• $\alpha < 1$ の場合

$$\begin{aligned} \sum_{s'=0}^{\infty} |m_{s'}|^\alpha &\leq \sum_{s'=0}^{\infty} \left(B \sum_{n' \in \Omega_D^\circ} |c_{n'}|^{s'} \right)^\alpha \\ &\leq \sum_{s'=0}^{\infty} B^\alpha \sum_{n' \in \Omega_D^\circ} |c_{n'}|^{s'\alpha} \\ &= B^\alpha \sum_{n' \in \Omega_D^\circ} \frac{1}{1 - |c_{n'}|^\alpha} < \infty \end{aligned}$$

二行目の不等式は $(x+y)^\alpha \leq x^\alpha + y^\alpha \ (x,\ y \geq 0)$ を用いている．したがって，$\max_n a_n$ を小さくすることで $\sum_{s'=0}^{\infty} |m_{s'}| < 1$ と出来る．

• $\alpha > 1$ の場合

$$\lim_{s \to \infty} |c_{n'}|^s \to 0 \ (n' \in \Omega_D^\circ)$$

なので, $s' \geq s_0$ ならば $\sum_{n' \in \Omega_D^\circ} |c_{n'}|^{s'} < 1$ となる $s_1 > 0$ が存在する. この s_1 を用いて,

$$\begin{aligned}
\sum_{s'=0}^{\infty} |m_{s'}|^\alpha &= \sum_{s'=0}^{s_1-1} |m_{s'}|^\alpha + \sum_{s'=s_1}^{\infty} |m_{s'}|^\alpha \\
&\leq \sum_{s'=0}^{s_1-1} |m_{s'}|^\alpha + \sum_{s'=s_1}^{\infty} B^\alpha \left(\sum_{n' \in \Omega_D^\circ} |c_{n'}|^{s'} \right)^\alpha \\
&\leq \sum_{s'=0}^{s_1-1} |m_{s'}|^\alpha + \sum_{s'=s_1}^{\infty} B^\alpha \sum_{n' \in \Omega_D^\circ} |c_{n'}|^{s'} \\
&= \sum_{s'=0}^{s_1-1} |m_{s'}|^\alpha + \sum_{n' \in \Omega_D^\circ} B^\alpha \frac{|c_{n'}|^{s_1}}{1 - |c_{n'}|} < \infty
\end{aligned}$$

$\sum_{s'=0}^{s_1-1} |m_{s'}|^\alpha$ も $\max_n a_n$ を小さくすれば小さくなる. したがって, $\max_n a_n$ を小さくすれば $\sum_{s'=0}^{\infty} |m_{s'}| < 1$ と出来る.

以上から, 任意の $\alpha > 0$ に対して, $\max_n a_n$ を小さくすれば $\sum_{s'=0}^{\infty} |m_{s'}|^\alpha < 1$ と出来ること, さらに (12) と出来ることもわかる. したがって, 定理の証明が完了した.

5 最後に

本稿では, [1] にもとづいて, 爆発解をもつ半線形熱方程式 (4) の離散化と (4) の爆発解および藤田指数に関する定理の離散類似を紹介した. さらに, [1] で提案されている差分方程式の Dhirichlet 境界値問題 (1) について議論し, 初期条件を十分小さくすることで解が任意の有限の時刻で爆発しないことを証明した.

(4) の Dhirichlet 問題の解が爆発する十分条件を与える研究が行われている [6, 7, 8]. 離散の場合である (1) でも同様の議論ができると期待され, 解の爆発の十分条件に関しては今後の研究課題である. 偏微分方程式に対応する離散方程式を考察することは, 偏微分方程式の解の挙動を計算機によって解析する上で重要となる. 計算機による解析も併せて本研究を偏微分方程式の爆発解, さらには, 爆発解が示す現象の解明につなげていくことも今後の課題としたい.

謝辞

本研究を行うにあたって, 有益なコメントと適切なアドバイスを与えて頂いた時弘哲治先生, Ralph Willox 先生そして岩尾慎介氏に深く感謝する.

参考文献

[1] K. Matsuya and T. Tokihiro, Existence and non-existence of global solutions for a discrete semilinear heat equation, *Discrete Contin. Dynam. Systems* 31(2011), 209–

220.
[2] H. Fujita, On the blowing up of solutions of the Cauchy problem for $u_t = \Delta u + u^{1+\alpha}$, *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. A Math.* 16(1966), 109–124.
[3] K. Hayakawa, On nonexistence of global solutions of some semilinear parabolic equations, *Proc. Japan Acad.* 49(1973), 503–505.
[4] K. Kobayashi, T. Sirao and H. Tanaka, On the growing up problem for semilinear heat equations, *J. Math. Soc. Japan* 29(1977), 407–424.
[5] F. B. Weissler, Existence and nonexistence of global solutions for a semilinear heat equation, *Israel J. Math.* 38(1981), 29–40.
[6] S. Kaplan, On the growth of solutions of quasi-linear parabolic equations, *Comm. Pure Appl. Math.* 16(1963), 305–330.
[7] M. Tsutsumi, On solutions of semilinear differential equations in a Hilbert space, *Math. Japon.* 17(1972), 173–193.
[8] J. M. Ball, Remarks on blow-up and nonexistence theorems for nonlinear evolution equations, *Quart. J. Math. Oxford Ser.* (2)28(1977), 473–486.

(原稿提出: 2015 年 12 月 24 日; 修正稿提出: 2016 年 1 月 18 日)