

Bifurcation Structure of a Novel Car-following Model with Relative Velocity Effect

メタデータ	言語: jpn 出版者: 公開日: 2016-08-23 キーワード (Ja): キーワード (En): 作成者: 友枝, 明保, 宮路, 智行, 池田, 幸太 メールアドレス: 所属:
URL	https://mu.repo.nii.ac.jp/records/254

相対速度を考慮したある追従モデルの分岐構造について

Bifurcation Structure of a Novel Car-following Model with Relative Velocity Effect

友枝明保¹

Akiyasu Tomoeda

宮路智行²

Tomoyuki Miyaji

池田幸太³

Kota Ikeda

概要

本論文では、2011年に社本らによって提案された、相対速度の効果を考慮した交通流追従モデルについて、一様流が安定となる条件を求め、さらに、分岐解析ソフトウェアである AUTO を用いた大域的な分岐構造の解析を行ったので、その結果を報告する。大域的な分岐図を描くことにより、各 Hopf 分岐点から生まれる安定な渋滞流が複数存在することがわかり、多重安定となる密度領域の存在が示された。

1 はじめに

交通流の研究は、モータリゼーションや道路環境の整備とともに発展し、実態を把握する交通調査の手法から、交通流を解析する理論、さらには、実際の道路計画・設計に至るまで、交通工学という名前の下で体系化されている [1, 2]。一方で、交通流を自己駆動粒子（自発的に運動することのできる粒子）の集団運動と考え、そのダイナミクスを新しい研究対象とし、数理学分野の手法を駆使して解明する研究も盛んに進められている [3, 4, 5]。特に、コンピュータの発展と洗練された数理モデルを用いた研究によって、交通流という現象の理解は益々深まっている。

実際の交通流には、ある普遍的な特徴が存在することが知られている [4]。実際、高速道路での交通流観測データ（図 1）を見ると、車両密度が小さい領域では、密度が増えるにつれて交通流量も増加するが、密度がある臨界値（臨界密度）より大きくなると、今度は密度が増加するにつれて交通流量は減少する。このような個々の差異によらない普遍的特徴は渋滞流に備わる数理的な特徴である。道路の形状、運転者の個性や車両性能といった違いがあることを鑑みれば、これは意外なことである。従ってその理解には数理科学的アプローチが有効であり、実際、数理モデルを用いた研究により、交通流に見られる特徴的な現象である自然渋滞の形成

¹ 武蔵野大学工学部数理工学科 准教授 / 武蔵野大学数理工学センター員 / JST CREST

² 明治大学研究・知財戦略機構 特任講師 / 明治大学先端数理学部インスティテュート所員

³ 明治大学総合数理学部現象数理学科 専任講師 / 明治大学先端数理学部インスティテュート所員

メカニズムの解明が進められてきた。

自然渋滞とは、主に高速道路で観測される渋滞のことを指し、車両密度がある臨界密度を超えたときに自然発生的に生じる渋滞のことである。自然渋滞の形成プロセスは、一様に走行している自由走行相（一様流）から渋滞相への（動的な）相転移として考えられ、一様流の不安定性という観点で議論される。つまり、臨界密度を越えると、一様流がある揺らぎに対して不安定化し、別の安定状態である渋滞流へと遷移した結果として、自然渋滞が形成されるというわけである [6, 7]。特に、渋滞流は臨界密度付近で一様流と双安定となることが知られている。

一様流の不安定化は線形安定性解析によって示され、これをもって交通流の変化を説明することが多い。パラメータの変化による線形安定性の変化には、ほとんどの場合、解の分岐を伴うため、不安定化とともに渋滞流に対応する別の安定状態が発生することが期待される。しかし、線形安定性解析はあくまで一様流の安定性を議論するものであり、分岐した解の性質はそれだけではわからない。また、局所的な分岐理論の適用だけでは渋滞流の出現を保証できないため、その理解には分岐解の大域的な構造を解明する必要がある。さらに、数理モデルの持つパラメータの変化によって大域的な解構造がどのように変化するかを解明することは、交通流を改善するためにどのような運転をすればよいのかという問いに対する答えを与える可能性もある。このように、大域的な分岐解析は、数理モデルの理論解析に必要であり、さらに、実践的な観点からも大変重要である。

常微分方程式で記述される数理モデルに対して、大域的な分岐構造を調べる研究はこれまでもなされている [8, 9, 10, 11]。Gasser らは文献 [8] において、坂東らによって提案された最適速度モデル [6] に着目して、その大域的な分岐構造を明らかにしている。最適速度モデルは、ある時刻 t における j 台目の車の位置 $x_j(t)$ に関する二階の常微分方程式

$$\ddot{x}_j(t) = a \{V(h_j(t)) - \dot{x}_j(t)\} \quad (1)$$

で記述されるモデルである。 $h_j(t) = x_{j+1}(t) - x_j(t)$ は j 台目の車とその前方の車 ($j+1$ 台目) との車間距離を表し、その車間距離によって定められる関数 $V(h_j(t))$ は最適速度関数と呼ばれ、理想的な走行速度を与える関数として導入される。車は車間距離が小さいときは速度がほぼゼロであり、車間距離が大きいときは法定速度で走行するため、最適速度関数は単調増加

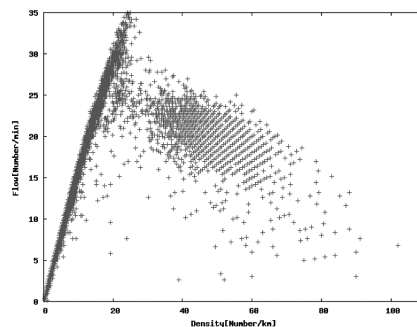


図 1 実際の高速道路（中央道）での基本図データ。各プロットは5分ごとの平均データ。縦軸が交通流量で横軸が車両密度である。（提供：NEXCO 中日本）

関数で定義される．たとえば，坂東らの文献 [6] によると， $V(h) = \tanh(h - 2) + \tanh(2)$ の関数形が用いられている．Gasser らは一様流の不安定化が Hopf 分岐によって引き起こされることを数学的に証明した．さらに，周期解の安定性についても数値的に解明しており，最適速度モデルがもつ分岐構造の全体像を明らかにしている．この結果から，ある条件の下では，Hopf 分岐の振る舞いが局所的に超臨界的であるが，巨視的に見ると亜臨界的な構造を示すことがわかる．つまり，最適速度モデルは，交通流データに見られる双安定構造を示すと言える．このことから，交通流モデルの理解には，局所分岐解析だけでは不十分であり，大域的な分岐構造の研究が重要であることがわかる．

さらに，Orosz ら [9, 10, 11] は，最適速度モデルにドライバーの認知に関する時間遅れの効果を組み込んだ新しい数理モデル

$$\ddot{x}_j(t) = a \{V(h_j(t - \tau)) - \dot{x}_j(t)\} \quad (2)$$

を提案し，Gasser らと同様，Hopf 分岐によって一様流が不安定化すること，及び，解の大域的な振る舞いを数値的に明らかにしている．数理モデル (2) で新しく組み込まれたパラメータ τ は，ドライバーの認知に関する時間遅れの効果で，オリジナルの最適速度モデルで考慮されている速度調整に係る緩和時間 $T = 1/a$ とは異なる効果である．

これらの分岐解析から得られた知見は，交通流の性質を解明するために極めて重要な結果であるが，これらの数理モデルには，実際の交通において重要な相対速度の効果が考慮されていない．そこで，本論文では，2011 年に社本らによって提案された相対速度を考慮した数理モデル (STNN モデル) [12] に着目し，その大域的な分岐構造を明らかにしたので報告する．本論文の構成は以下の通りである．2 章では STNN モデルについて紹介し，線形安定性の条件を与える．分岐解析ソフトウェア AUTO [13] に適した変数変換を施した数理モデルに対する分岐解析の結果を 3 章で示し，4 章では結論を述べる．

2 相対速度の効果を導入した数理モデル (STNN モデル)

2.1 STNN モデル

2011 年に社本らによって，新しい交通流モデル (STNN モデル) が提案された [12]．STNN モデルの利点は，実験的にパラメータを推定できることであり，実際，社本らは各パラメータの値を，実験データに基づいて推定している [12]．STNN モデルは，相対速度の効果が考慮されており，次のような常微分方程式で記述される．

$$\dot{v}_j = a - b \frac{v_j}{(h_j - d)^2} \exp(-ch_j) - \gamma v_j. \quad (3)$$

ここで， a, b, c, d, γ は非負値パラメータである．パラメータ a は最大加速度を表す．つまり， a は止まっている状態から動き出すときの車両の初期加速度を与える．パラメータ d は車両が完全に止まったときの停止車間距離を意味する．その他のパラメータ b, c, γ は，それぞれ前方車両との相互作用の強さ，相対速度効果の重み，走行速度に対する抵抗の強さを表す．

STNN モデル (3) を一般化すると次のように表示できる.

$$\ddot{x}_j = a - \dot{x}_j W(h_j, \dot{h}_j). \quad (4)$$

(3) の場合, W は

$$W(h_j, \dot{h}_j) = \frac{b}{(h_j - d)^2} \exp(-c\dot{h}_j) + \gamma \quad (5)$$

である.

2.2 一様流の線形安定性

社本らは STNN モデル (3) において, 一様流が不安定化する事を長波長近似の条件のもとで示した [12]. 彼らはさらに, 一様流に微小擾乱を与えた初期値を持つ (3) に対する数値シミュレーションによって渋滞流を観察した. ここでは N 台の車両が長さ L の円環上を走行している状況を考え, 一様流の安定性をより一般的に調べる.

(4) における一様流 $(x_j, v_j) = (x_j^*, v_j^*)$ は次のような解である.

$$x_j^*(t) = vt + (j-1)\frac{L}{N}, \quad v_j^*(t) = v, \quad (j = 1, 2, \dots, N). \quad (6)$$

ここで,

$$\frac{L}{N} > d \quad (7)$$

であり,

$$v = \frac{a}{W(L/N, 0)} \quad (8)$$

である. さらに,

$$w_0 = W(L/N, 0), \quad w_1 = W_h(L/N, 0), \quad w_2 = W_v(L/N, 0)$$

とおく. ここで, W_h と W_v はそれぞれ W の一番目と二番目の独立変数に関する偏微分を表す. ε を微小パラメータとし, $(x_j, v_j) = (x_j^* + \varepsilon\phi_j, v_j^* + \varepsilon\psi_j)$ として, 一様流の周りで線形化することで, ε のオーダーで次の系を得る.

$$\begin{cases} \dot{\phi}_j = \psi_j, \\ \dot{\psi}_j = -w_0\psi_j - vw_1(\phi_{j+1} - \phi_j) - vw_2(\psi_{j+1} - \psi_j). \end{cases} \quad (9)$$

$\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_N$ に対する離散 Fourier 変換によって, 一様流の線形安定性は N 個の 2 次正方行列

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ vw_1(1 - \omega_n) & vw_2(1 - \omega_n) - w_0 \end{pmatrix} \quad (10)$$

の固有値問題に帰着する. ただし $n = 0, 1, \dots, N-1$ に対して $\omega_n = e^{2\pi in/N}$ である. 結局固有値は

$$\lambda_n^\pm = \frac{1}{2}(-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}), \quad p = w_0 - vw_2(1 - \omega_n), \quad q = -vw_1(1 - \omega_n)$$

であり, $\omega_{N-n} = \bar{\omega}_n$ に注意すると $\lambda_{N-n}^{\pm} = \overline{\lambda_n^{\pm}}$ がわかる.

特に (3) に対しては,

$$w_0 > 0, \quad w_1 < 0, \quad w_2 < 0$$

が成り立つ. $\text{Re}\lambda_n^+ \geq 0$ となる必要十分条件は

$$-\frac{(w_0 - 2vw_2)^2}{v(w_1 + w_2(w_0 - 2vw_2))} \leq 1 + \cos \frac{2n\pi}{N} \quad (11)$$

であることがわかる. 左辺は常に正である. (11) を満たす n が存在する場合, n モードを持つ周期解が分岐するのである.

3 AUTO を用いた分岐解析

文献 [12] の数値計算結果は, 一様流とは別の一つの解を捉えているが, パラメータが変化したときの大域的な分岐構造の変化までは明らかにされていない. そこで, 本論文では, 分岐解析ソフトウェアである AUTO [13] を利用して, 数値的に STNN モデルの大域的な分岐構造を明らかにする.

ここでは, 円環上を複数台の車両が走行している状況を考える. この状況において周期的な構造を持つ場合, 並進対称性によって同一視できる解が存在するが, AUTO は解の 1 パラメータ族 (曲線) を追跡するので, この特徴は AUTO を使う際に不向きである. そこで, モデルの表示を書き換えることから始める.

以下, N 台の車両が長さ L の円環上を走行している状況を考える. 車両位置 x_{N+1} は

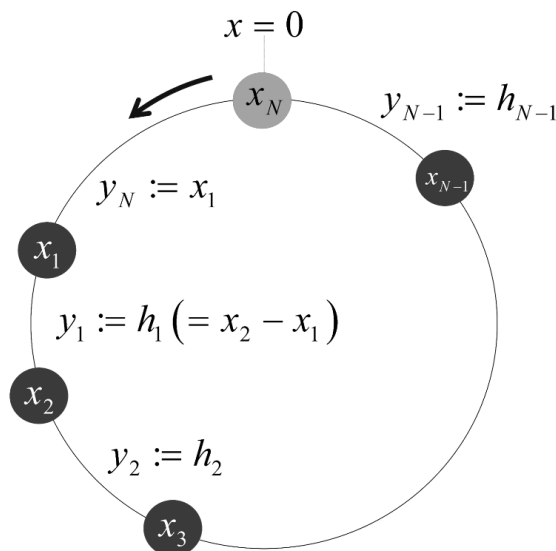


図 2 新しく導入した変数 y_j の定義 [14].

$x_{N+1} = x_1 + L$ と考える. すると,

$$h_N = x_1 + L - x_N, \quad (12)$$

$$\sum_{j=1}^N h_j = L \quad (13)$$

が成り立つ. つまり, 全ての車の車間距離の総和は円環の道路長そのものになる. 並進対称性を避けるために, N 台目の車の位置を $x = 0$ と固定し, 新しい変数 $y = (y_1, \dots, y_N)$ を導入することにより, 各車の位置を N 台目に対する相対的な位置で表現する. ここで, y は

$$y = (y_1, \dots, y_N) = (h_1, \dots, h_{N-1}, x_1) \quad (14)$$

を満たす (図 2). この線形変換は正則になっていて, 実際, $j - 1 \geq 1$ において和をとると

$$x_1 = y_N, \quad x_j = y_N + \sum_{k=1}^{j-1} y_k, \quad (j = 2, \dots, N) \quad (15)$$

という逆変換によって, 各 x_j が与えられる. この表記を用いて, 変数 y でモデル方程式 (3) を書き直すと, N 台の場合は次の方程式系で記述される.

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = -(\dot{y}_N + \dot{y}_1)W(y_2, \dot{y}_2) + \dot{y}_N W(y_1, \dot{y}_1), \\ \dot{y}_j = -(\dot{y}_N + \sum_{k=1}^j \dot{y}_k)W(y_{j+1}, \dot{y}_{j+1}) + (\dot{y}_N + \sum_{k=1}^{j-1} \dot{y}_k)W(y_j, \dot{y}_j), \\ \dot{y}_{N-1} = -\left(\sum_{k=1}^N \dot{y}_k\right)W\left(L - \sum_{k=1}^{N-1} y_k, -\sum_{k=1}^{N-1} \dot{y}_k\right) + (\dot{y}_N + \sum_{k=1}^{N-2} \dot{y}_k)W(y_{N-1}, \dot{y}_{N-1}), \\ \dot{y}_N = a - \dot{y}_N W(y_1, \dot{y}_1). \end{cases} \quad (16)$$

ただし, $j = 2, 3, \dots, N - 2$ である. 系 (16) は y_N 以外の変数で閉じており, y_N は \dot{y}_N を積分すれば得られる. (3) の一様流は (16) の孤立した平衡点に対応する. (16) のモデル表示を AUTO に実装することにより, 分岐構造の解析を行う. 以降, (16) の形に書き換えられた表示を STNN モデルと呼ぶこととする.

まず最初は, 道路長 L のみを分岐パラメータとする相対速度の効果が無い $c = 0$ の場合の分岐構造について述べる. 次に, L に加えて c も分岐パラメータとして, L と c の 2 パラメータ分岐図を描くことにより, 相対速度の効果が有効な $c \neq 0$ の場合についての分岐構造の変化について述べる [14]. さらに, 一様流が不安定化する Hopf 分岐点だけでなく, 他の Hopf 分岐点から生まれる解を考慮することにより, STNN モデルが持つ詳細な分岐構造について述べる. 他のモデルパラメータについては, 文献 [12] で推定されている値 $a = 0.73$, $b = 3.25$, $d = 5.25$, $\gamma = 0.0517$ で固定した. さらに, 車の台数を $N = 30$ とした.

3.1 相対速度の効果が無い場合 ($c = 0$)

まずはじめに, 相対速度の効果が無い $c = 0$ の場合の大域的な分岐構造について解析する. この場合 (11) の判定条件から, 車が 30 台の場合は, 一様流は高々 12 個のモードが Hopf 分

岐しうることがわかる。STNN モデルに対して、 L を分岐パラメータとした分岐図が図 3 である。縦軸は一台目の車の相対速度である。図 3 左は分岐図の全体像であり、図 3 右は Hopf 分岐点 $L = 1333.43$ 付近の拡大図である。実線と破線はそれぞれ安定な解と不安定な解を意味している。この結果から、分岐パラメータ L が小さくなるにつれ（密度が大きくなるにつれ）、超臨界的に Hopf 分岐が生じることがわかる。つまり、相対速度が一定 ($\frac{dh_1}{dt} = 0$) である一様流解にそって、 L を小さくしていくと（密度を大きくすると）、最初の安定な平衡点 ($L = 1333.43$) が現れ、その点において一様流解の安定性が安定から不安定へと切り替わり、安定な周期解の枝が新しく生まれる。その後、この周期解の枝において、二つのサドルノード分岐 ($L = 1333.41$ と $L = 2619.25$) が生じる。パラメータ領域 $1333.43 < L < 2619.25$ においては、一様流解と周期解の双方が安定であるため、STNN モデルで記述される交通流のダイナミクスは双安定性を示すといえる。ただし、ここで示した分岐図は一台目の相対速度だけで描いた分岐図であるため、厳密には、全ての車両に対して同様に分岐図のプロファイルを見る必要があることに注意しておく。この大域的な分岐構造は最適速度モデルの構造 [8] と定性的に一致していることがわかる。

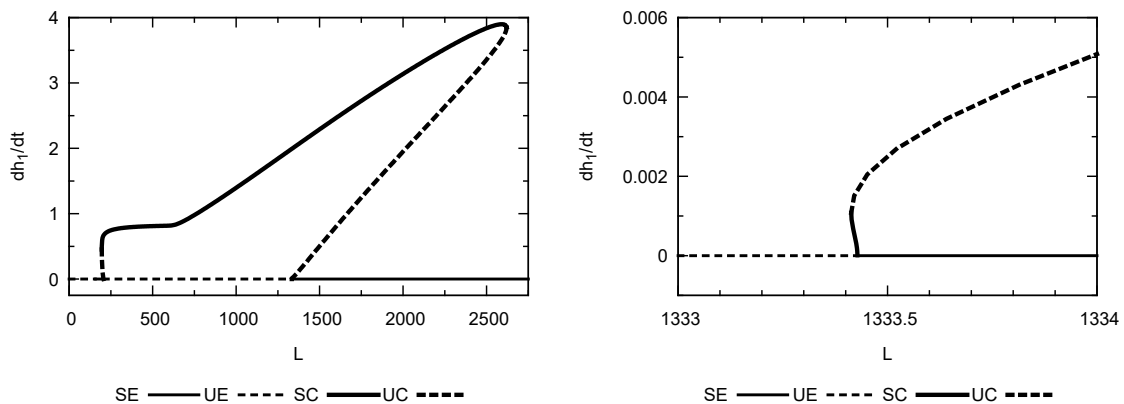


図 3 (左) STNN モデルに対する大域的な分岐図 [14]. (右) 分岐点 ($L = 1333.43$) 近傍での拡大図 [14]. 図中の各略字はそれぞれ次の意味である。安定な平衡解 (Stable Equilibrium : SE), 不安定な平衡解 (Unstable Equilibrium : UE), 安定な周期解 (Stable Cycle : SC), 不安定な周期解 (Unstable Cycle : UC) .

3.2 相対速度の効果がある場合 ($c \neq 0$)

次に、相対速度の効果がある場合 $c \neq 0$ の分岐構造を考える。 L だけでなく、 c も分岐パラメータとして導入し、Hopf 分岐点とサドルノード分岐点を (L, c) の 2 パラメータ平面上で描くことにより、 L, c が変わった場合に分岐構造がどのように変化するかを明らかにする。具体的には、 $c = 0$ の場合の二つの Hopf 分岐点 ($(L, c) = (205.612, 0), (1333.41, 0)$) と二つのサドルノード分岐点をスタートとして、 L, c を変えたときの特徴点の変化を追跡する。

図 4 に 2 パラメータ分岐図の全体像とカスプ部分の拡大図を示す。Hopf 分岐点は、 $(L, c) = (395.55, 1.995)$ において折れ曲がっているため、 $c > 1.995$ においては、Hopf 分岐が生じない。

c が大きいパラメータ領域で Hopf 分岐が生じない理由を, モデル式に即して解釈すると, 相対速度の効果が強くなることは, 各車が前方の車との速度差に敏感に反応して速度を揃えるように加減速を行うことを意味し, 擾乱に対して一様流が安定となる. つまり, 相対速度の効果を導入した場合, パラメータ領域 $c > 1.955$ においては, 一様流は全ての密度領域において安定となることが示された. 一方で, サドルノード分岐点については, $(L, c) = (1019.23, 0.6664)$ でカuspが生じている. これは, $c > 0.6664$ においては, 図 3 で見られたような双安定構造が観測されないことを意味している. つまり, 一様流が不安定であり渋滞流が安定となる密度領域は生じるが, その両者が共存する密度領域は存在しないということである. これらの結果から, 三つのパラメータ区間 $0 < c < 0.6664$, $0.6664 < c < 1.955$, $1.955 < c$ において, 定性的に異なる分岐構造を持つことがわかった.

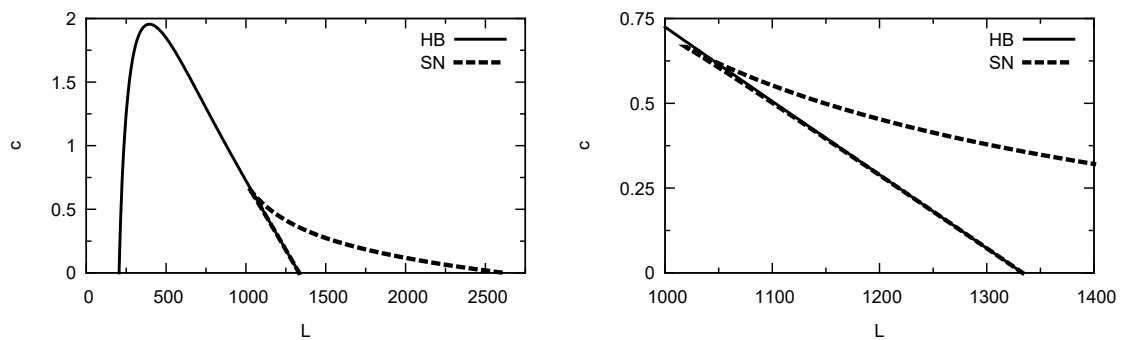


図 4 (左) Hopf 分岐点 (HB) とサドルノード分岐点 (SN) の (L, c) 平面上での振る舞い [14]. (右) カusp付近での拡大図 [14].

3.3 Hopf 分岐点から生じる安定な解と多重安定性

ここまでは, 特定の二つの Hopf 分岐点に注目して議論していたが, 他の Hopf 分岐点がパラメータ領域 $205.612 < L < 1333.41$ に存在する可能性も考えられ, それらの分岐点から生まれる枝にも安定な解が存在する可能性がある. もしそのような安定な解が他の分岐点からも生まれれば, STNN モデルは, 双安定な構造にとどまらず, [15, 16] で報告されているような多重安定な構造が存在しうる可能性がある. そこで, $c = 0$ の場合に各 Hopf 分岐点を追跡した分岐図が図 5 である. 図 5 を見ると, 安定な解を意味する実線がある密度において複数存在することがわかり, 多重安定の構造を持つことがわかる. 例えば, $L = 1200$ を見ると, 同一密度において, 五種類の渋滞流が安定に存在することがわかる. 実際, $L = 1200$ のときの内部の分岐点から生まれる安定な渋滞解に対応するシミュレーションのスナップショットを図 6 に示す. この図から, それぞれ各モードが渋滞パターンとして観察されることが確認できる. さらに, (L, c) の 2 パラメータでの Hopf 分岐点の変化を描いた図が図 7 であり, c の値が大きくなるにつれて一様流が安定となる密度領域が増え, Hopf 分岐点の数が減っていることがわかった.

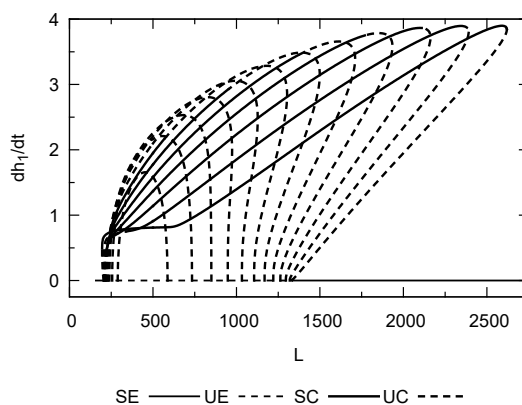


図5 各 Hopf 分岐点を追跡した分岐図.

4 おわりに

本論文では、分岐解析ソフトウェアである AUTO を用いて、相対速度の効果が組み込まれた交通流モデルである STNN モデルの臨界密度から分岐する周期解の大域的な分岐構造について、明らかにした。相対速度の効果を考慮しない $c = 0$ のときは、一様流は Hopf 分岐によって不安定化し、その Hopf 分岐は局所的には超臨界的であるが、大域的には亜臨界的であることがわかった。これは、相対速度の効果を持たない最適速度モデルと同じ特徴で、先行研究の結果と定性的に等しいと言える。さらに、相対速度の効果を考慮した $c \neq 0$ の場合に、二つの分岐パラメータ (L, c) のもとで、二つの Hopf 分岐点と二つのサドルノード分岐点を追跡した。その結果、 $c > 1.955$ においては Hopf 分岐点が消滅し、一様流が全ての密度領域において常に安定となることがわかった。また、サドルノード分岐については、 $(L, c) = (1019.23, 0.6664)$ でカuspが生じ、 $c > 0.6664$ においては、一様流解が不安定化する Hopf 分岐点から生まれる枝に対して、安定な一様流解と安定な周期解が共存する双安定構造は観測されないことがわかった。一方で、他の Hopf 分岐点までを考慮すると、安定な解が他の Hopf 分岐点からも生まれることがわかり、その結果として、一様流に加えて複数の渋滞流が安定となる多重安定構造を示す密度領域の存在が明らかとなった。今後は、この分岐構造の変化と実際の実験から得られるパラメータを比較検討することにより、渋滞を緩和するための現実的なパラメータを明らかにしていく予定である。

謝辞

本研究は「明治大学先端数理科学インスティテュート MIMS 数理科学共同研究プロジェクト」による支援、及び、JSPS 科研費若手研究 (B)(No. 25790099, No. 15K17594) の助成を受けたものです。また、本研究では文部科学省共同利用・共同研究拠点明治大学先端数理科学インスティテュート「現象数理学研究拠点」の共同利用計算機設備を利用しました。

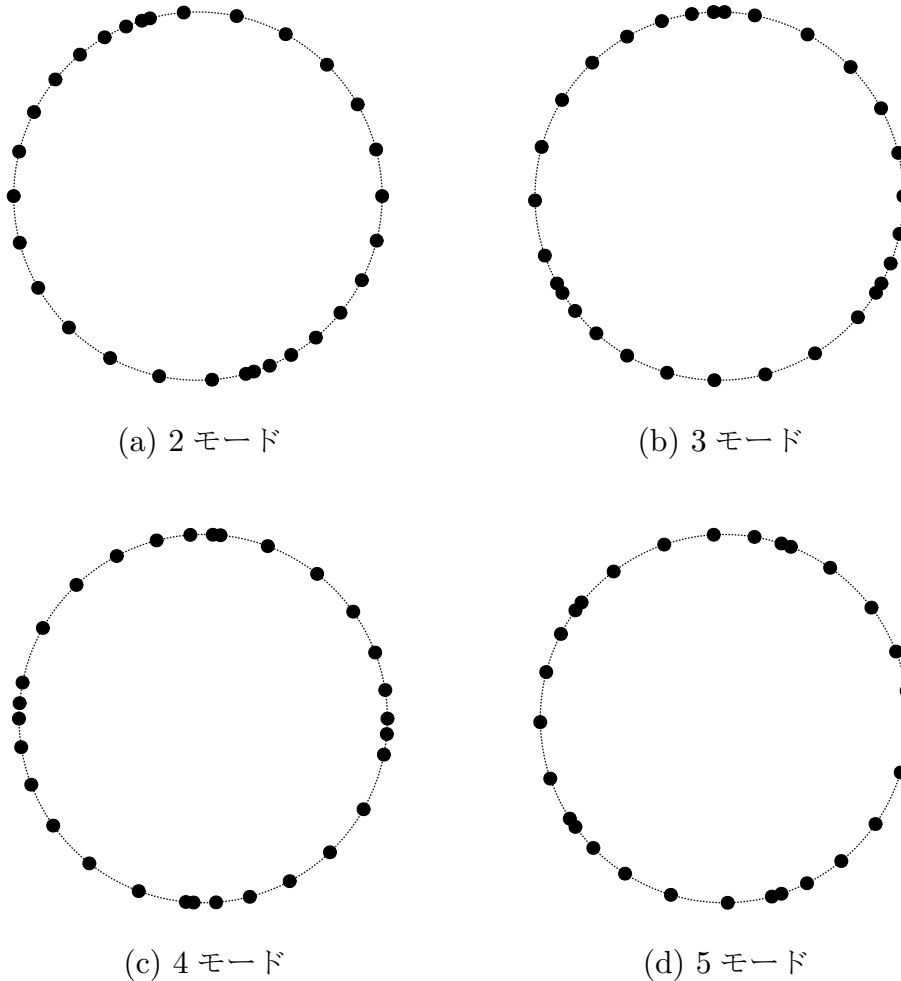


図6 それぞれの Hopf 分岐点から分岐した安定な解に対応するシミュレーションのスナップショット ($c = 0$).

参考文献

- [1] 越正毅編著, 交通工学通論, 技術書院, (1989).
- [2] 飯田恭敬監修, 北村隆一編著, 交通工学, オーム社, (2008).
- [3] D. Chowdhury, L. Santen, and A. Schadschneider, Phys. Rep. **329**, 199 (2000).
- [4] D. Helbing, Rev. Mod. Phys. **73**, 1067 (2001).
- [5] A. Schadschneider, D. Chowdhury, and K. Nishinari, Stochastic Transport in Complex Systems from Molecules to Vehicles (Elsevier, Amsterdam, 2010).
- [6] M. Bando, K. Hasebe, A. Nakayama, A. Shibata, and Y. Sugiyama, Phys. Rev. E **51**, 1035 (1995).
- [7] Y. Sugiyama, M. Fukui, M. Kikuchi, K. Hasebe, A. Nakayama, K. Nishinari, S. Tadaki and S. Yukawa, New J. Phys. **10**, 033001 (2008).
- [8] I. Gasser, G. Sirito, and B. Werner, Physica D **197**, 222 (2004).

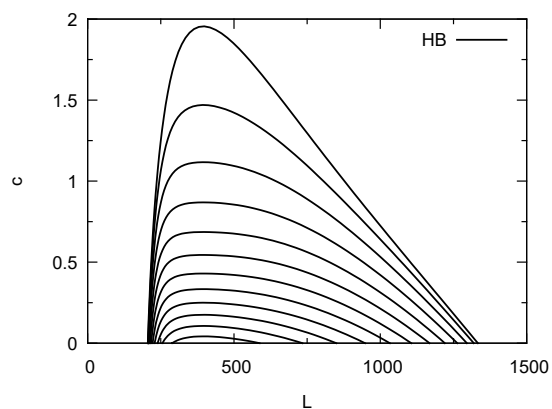


図7 2パラメータでの Hopf 分岐点の変化.

- [9] G. Orosz, R. E. Wilson, and B. Krauskopf, *Phys. Rev. E* **70**, 026207 (2004).
- [10] G. Orosz, B. Krauskopf, and R. E. Wilson, *Physica D* **211**, 277 (2005).
- [11] G. Orosz and G. Stepan, *Proc. R. Soc. A* **462**, 2643 (2006).
- [12] D. Shamoto, A. Tomoeda, R. Nishi, and K. Nishinari, *Phys. Rev. E* **83**, 046105 (2011).
- [13] E. J. Doedel and B. E. Oldeman, Concordia University, Montreal, Canada (2012).
- [14] A. Tomoeda, T. Miyaji and K. Ikeda, *Proceedings of Traffic and Granular Flow'15*, Springer (to appear).
- [15] E. Tomer, L. Safonov and S. Havlin, *Phys. Rev. Lett.*, **84**, 382 (2000).
- [16] K. Nishinari and D. Takahashi, *J. Phys. A: Math. Gen.* **32**, 93 (1999).

(原稿提出: 2016年1月6日; 修正稿提出: 2016年1月25日)