

Design of highly accurate formulas for numerical integration in weighted Hardy spaces with the aid of potential theory

メタデータ	言語: jpn 出版者: 公開日: 2016-08-23 キーワード (Ja): キーワード (En): 作成者: 田中, 健一郎 メールアドレス: 所属:
URL	https://mu.repo.nii.ac.jp/records/253

重み付きハーディ空間における高精度数値積分公式の ポテンシャル論による設計

Design of highly accurate formulas for numerical integration in weighted Hardy spaces with the aid of potential theory

田中健一郎¹

Ken'ichiro Tanaka

概要

本稿では、重み付きハーディ空間というある解析関数の空間に対し、その関数空間のどの要素に対しても十分に高精度な数値積分公式の設計法を提案する。この数値積分公式は、最近、田中らがポテンシャル論の方法を用いて求めた高精度関数近似公式を基にしたものである。数値実験の結果、本稿で提案する公式は、それぞれの重みに対応した実軸上の台形公式には劣るものの、ある程度高い精度を実現することが分かった。この公式の改良や理論的な解析、実用化などは今後の課題である。

1 はじめに

本稿では、重み付きハーディ空間というある解析関数の空間に対し、その関数空間のどの要素に対しても十分に高精度な数値積分公式の設計法を提案する。ここで考える重み付きハーディ空間には、その空間を定義するパラメータや重みに応じて様々なものがあるが、本稿では、それらのいずれにも適用可能な一定の設計法を提案する。

一般に数値積分公式とは、ある領域 $\Omega \subset \mathbf{R}^m$ で定義された関数 F で積分

$$I = \int_{\Omega} F(t) dt \quad (1.1)$$

が存在するものに対し、この積分値を精度よく近似的に数値計算するための公式である。数値積分は様々な分野で必要となる積分の計算に用いられる他、微分方程式・積分方程式の数値解法にも用いられるなど、その応用範囲は広い。これまでに数多くの数値積分公式が知られており、その対象も低次元 (m が小さい場合) の積分から高次元 (m が大きい場合) の積分まで幅広いが、本稿では、1次元 ($m = 1$) の積分に焦点を絞る。1次元の積分に対する積分公式としては、台形公式を含む Newton-Cotes 型の公式や、直交多項式系と関連の深い Gauss 型公式などが代表例として良く知られている [3, 9]。これらの例は、被積分関数 F を有限個の標本点で補間し、その補間式を積分することによってできる公式である。式で表せば

$$F(t) \approx \sum_{i=1}^n F(a_i) l_i(t) \implies \int_{\Omega} F(t) dt \approx \sum_{i=1}^n c_i F(a_i) \quad \left(c_i = \int_{\Omega} l_i(t) dt \right) \quad (1.2)$$

¹ 武蔵野大学数理工学センター員 / 武蔵野大学工学部数理工学科准教授

となる. ここで $\{a_i\}$ が標本点の列, $\{l_i(t)\}$ が補間に用いる基底関数の列である.

このような数値積分公式がどれだけ精度よく真の値を近似するかは, 与えられた積分 I の積分領域 Ω や被積分関数 F の性質に依存する. 数値積分法の中には, うまく変数変換 $t = \psi(x)$ を選んで, 与えられた積分 I を

$$I = \int_{\psi^{-1}(\Omega)} F(\psi(x))\psi'(x) dx \quad (1.3)$$

のように数値積分にとって有利なものに変換してから数値積分を実行する方法がある. このような方法による一連の公式を変数変換型数値積分公式という. その代表例の一つに, 高橋秀俊, 森正武の両氏により開発された二重指数関数型公式 (DE 公式) がある [13]. $\Omega = (-1, 1)$ の場合を例にとると, DE 公式は, 二重指数関数型変数変換 (DE 変換)

$$\psi : (-\infty, \infty) \rightarrow (-1, 1), \quad \psi(x) = \tanh\left(\frac{\pi}{2} \sinh x\right) \quad (1.4)$$

を用いてできる式 (1.3) の積分を, $\mathbf{R} = (-\infty, \infty)$ における台形公式²で近似してできる公式

$$I \approx h \sum_{k=-M}^N F(\psi(kh))\psi'(kh) \quad (1.5)$$

$$= h \sum_{k=-M}^N F\left(\tanh\left(\frac{\pi}{2} \sinh(kh)\right)\right) \frac{\pi \cosh(kh)}{2 \cosh^2((\pi/2) \sinh(kh))} \quad (1.6)$$

である. ここで M と N は正の整数, h は正の実数である. このとき標本点は実軸 \mathbf{R} 上に等間隔に $M + N + 1$ 個あり, 隣り合う標本点同士の間隔は h である. これらのパラメータは, 理論的な精度の解析を基に, 要求される精度に応じて適切に決めることができる. ここで, 以上に述べた数値積分公式の特徴を表 1 に簡単にまとめておく.

DE 公式は, 変換後の被積分関数 $f(t) = F(\psi(t))\psi'(t)$ に対する一定の条件のもとで, 極めて高精度な公式となることが知られている [7, 14]. この精度の理論的な解析の詳細は本稿では省くが, 高い精度が実現される要因は, 式 (1.5) で適用した \mathbf{R} 上の台形公式の持つ良い性質と, 変換後の被積分関数 f が急減衰するという性質である. \mathbf{R} 上の台形公式は, ある基準³に関して「最適」な公式であることが示されており⁴, また, 式 (1.6) から分かるように, 元々の F の端点 $x = \pm 1$ での増大度が一定の範囲内であれば, ψ' の影響で変換後の被積分関数 f は二重指数関数的に減衰する. このため DE 公式は, F が端点で特異性を持つような, 通常は数値積分が難しいとされる場合にも有効な公式として世界的にも有名である.

杉原 [7] は, DE 公式の精度に関する精緻な理論的解析を行うため, 変換後の被積分関数 f

² なお, 台形公式に関連する最近のサーベイとして [16] がある.

³ 具体的には「誤差の特性関数の漸近減衰率」という基準である. これは, この後述べる杉原 [7] の最適性の基準とは異なる.

⁴ 高橋と森により 1970 年頃に示された. [4] の第 2.3 節および, そこで引用されている参考文献を参照せよ. なお [4] では, DE 公式の発見とその後の発展の経緯が, 理論的内容も含めて語られている.

表 1 各種数値積分公式の特徴

数値積分公式	メリット	デメリット
Newton-Cotes 型公式 (台形則, Simpson 則など)	計算が容易	精度を高くするには 多くの標本点が必要
Gauss 型公式	台形則などに比べ, 少ない標本点数で高精度	端点特異性に弱い
DE 公式*	台形則などに比べ, 少ない標本点数で高精度で, 端点特異性にも強い†	桁落ちに配慮が必要, また, 被積分関数に要求される 解析性の条件が厳しい
本稿の公式 (4.1)‡	適切な変換で被積分関数の \mathbf{R} 上の減衰 を実現すれば, その減衰度に応じた 十分に高精度な数値積分が可能	係数の計算が面倒で, また 既存の公式より高精度とは 限らない§

* 式 (1.7) から式 (1.8) が導かれるのと同様, DE-Sinc 公式から導かれると見こともできる.

† 端点特異性がない場合は, Gauss 型公式に劣ることもある.

‡ 本稿 4 節で示すように, 関数近似公式 (3.12) から導かれる.

§ ただ, 既存の公式より良い精度を持つように改良できる可能性がある. 付録 B を参照.

が属すべき関数空間として, 重み付きハーディ空間

$$H^\infty(\mathcal{D}_d, w) := \left\{ f : \mathcal{D}_d \rightarrow \mathbf{C} \mid f \text{ は } \mathcal{D}_d \text{ 上で解析的で } \|f\| := \sup_{z \in \mathcal{D}_d} \left| \frac{f(z)}{w(z)} \right| < \infty \right\}$$

を導入した. ここで d は正の実数, $\mathcal{D}_d := \{z \in \mathbf{C} \mid |\operatorname{Im} z| < d\}$ であり, w は第 2.1 節で述べる重み関数である. この空間は, 第 2.1 節の (2.3) で改めて述べるが, 実軸を中に含む領域で解析的な関数 f で, 重み関数 w で指定される減衰度を持つものの全体からなる関数空間である. この解析性の条件は被積分関数の範囲を限定するが, 物理などの数学解析の応用に現れる関数の大部分はこのような解析性を持つことが指摘されており [12], 実用性は損なわれない. 杉原は, まず, 各要素 $f \in H^\infty(\mathcal{D}_d, w)$ に対する真の積分値と数値積分の値の差を f の線形汎関数と見なし, これの作用素ノルムを最小化するような数値積分公式を「最適」と定めることで最適性の概念を明確化した. その上で, 重み関数 w が二重指数関数的に減衰する場合に, その最小作用素ノルムの下からの評価と \mathbf{R} 上の台形公式の誤差の上からの評価を与え, 両者が一致はしないものの十分近いことを示した⁵. つまり, これにより DE 公式の「準最適性」を示した. しかし, その最小作用素ノルムの正確な値は分かっておらず, これを実際に達成する真に「最適」な公式も知られていない⁶.

ところで, 式 (1.2) で見たように, 数値積分と関数近似は密接な関係にある. 実軸 \mathbf{R} における関数近似法の代表例として, Stenger [10, 11] らによって sinc 数値計算法の基礎として用いられてきた sinc 関数近似がある. sinc 関数近似は, sinc 関数 $\operatorname{sinc}(x) = (\sin \pi x)/(\pi x)$ によ

⁵ なお, 杉原 [7] では, 重み関数 w が一重指数関数的に減衰する場合, つまり注意 1.1 で後述する SE 公式についても同様の議論が行われている.

⁶ なお, $w(x) = O(\exp(-|x|))$ ($x \rightarrow \pm\infty$) の場合には, Andersson [1], Andersson & Bojanov [2] らの結果を基に, 最適な数値積分公式の精度が求められている. しかし, 一般の場合については求められていない.

る補間型の関数近似

$$f(x) \approx \sum_{k=-M}^N f(kh) \operatorname{sinc}(x - kh) \quad (1.7)$$

である. 実は, この式 (1.7) の両辺を式 (1.2) と同様に $(-\infty, \infty)$ で積分すると,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx \approx h \sum_{k=-M}^N f(kh) \quad (1.8)$$

のように式 (1.5) で用いた台形公式が得られる⁷. 杉原 [8] は, この sinc 関数近似 (1.7) と DE 変換を組み合わせた **DE-Sinc** 公式を考案した. そして, この公式についても重み付きハーディ空間における誤差評価および, 最適性との関係についての解析を行った. その結果, やはり DE-Sinc 公式の準最適性が示された一方で, 最適公式は知られていなかった. しかし最近, 田中ら [15] によって, 一定の条件を満たす重み関数 w 一般について, $H^\infty(\mathcal{D}_d, w)$ における最適公式を近似的に求める一定の方法が考案された. ここで用いられた方法は, [6] で展開されているポテンシャル論の方法を用いたものである. そこで, 本稿では, この方法によって設計される関数近似公式を式 (1.2) や (1.8) と同様に形式的に積分することで, 数値積分公式を提案する. 一般には, 関数近似公式として最適なものを用いても最適な数値積分公式が得られる保証はないが, 本稿では, このようにして設計した公式が高精度となることを期待して, どの程度の精度が出るかを実験によって観察することを目的とする. 表 1 に, 本稿で提案する公式についても特徴を記載した.

本稿の構成は以下のとおりである. まず第 2 節で, 本稿での議論に必要な数学的事項をまとめる. 次に第 3 節で, [15] で詳述されている関数近似公式の設計法の概要を述べる. そして第 4 節で, この関数近似公式をもとにした数値積分公式を導出する. 第 5 節でこの数値積分公式を実際に適用する実験を行い, 実際の精度を観察する. 最後に, 第 6 節でまとめを述べる.

注意 1.1. 本節では DE 公式について説明したが, 一方で, 変換後の被積分関数 f が $f(x) = O(\exp(-(\beta|x|)^\rho))$ ($x \rightarrow \pm\infty$) のような一重指数関数的減衰をするように変数変換を選んで台形公式を適用する方法もあり, Stenger [10, 11] らによって考案され, 利用されている. 本稿では, この変換と公式を便宜上それぞれ **SE** 変換・**SE** 公式と呼ぶことにする. 最初の被積分関数 F が同じなら, より急な減衰を実現する DE 変換を用いた方が精度が良くなるように思えるかもしれない. しかし実は, DE 変換は SE 変換に比べて F の正則領域が広くないと十分な精度が出ないことが知られており, 常に DE 公式の方が有利というわけではない [14]. このあたりの事情については [5, 14] を参照されたい.

⁷ ただし, 標本点間隔 h の最適な定め方は, 関数近似公式 (1.7) の場合と数値積分公式 (1.8) の場合とは一般には異なる.

2 数学的準備

2.1 重み関数と重み付きハーディ空間

まず, [7] に従い, 本稿で考える重み関数 w の範囲を明確にするために関数空間を設定する. d を正の実数とし, \mathcal{D}_d を $\mathcal{D}_d := \{z \in \mathbf{C} \mid |\operatorname{Im} z| < d\}$ で定義される複素平面上の帯状領域とする. そして, 関数空間 $B(\mathcal{D}_d)$ を, \mathcal{D}_d 上の解析関数 ζ であって

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \int_{-d}^d |\zeta(x + iy)| dy = 0 \quad (2.1)$$

かつ

$$\lim_{y \rightarrow d-0} \int_{-\infty}^{\infty} (|\zeta(x + iy)| + |\zeta(x - iy)|) dx < \infty \quad (2.2)$$

を満たすものの全体として定義する. 本稿では, 複素数値関数 w が \mathcal{D}_d 上の解析関数であって次の仮定 1 を満たすとき, w を \mathcal{D}_d 上の重み関数と呼ぶことにする.

仮定 1. 関数 w は $B(\mathcal{D}_d)$ の元で, \mathcal{D}_d 上の任意の点で零にならず, 実軸上では実数値をとる.

仮定 1 を満たす重み関数 w に対して, \mathcal{D}_d 上の重み付きハーディ空間を次で定義する:

$$\mathbf{H}^\infty(\mathcal{D}_d, w) := \left\{ f : \mathcal{D}_d \rightarrow \mathbf{C} \mid f \text{ は } \mathcal{D}_d \text{ 上で解析的で } \|f\| := \sup_{z \in \mathcal{D}_d} \left| \frac{f(z)}{w(z)} \right| < \infty \right\}. \quad (2.3)$$

ここで, 数学的議論を簡単にするため, 本稿では w に対して次の仮定も考える.

仮定 2. 関数 w は \mathbf{R} 上の偶関数である.

仮定 3. 関数 $\log w$ は \mathbf{R} 上の凹関数である.

2.2 最適関数近似

ここでは, 仮定 1-3 を満たす重み関数 w に対し, 重み付きハーディ空間 $\mathbf{H}^\infty(\mathcal{D}_d, w)$ における近似公式の最適性を定式化する. ここで述べる定式化は [8] で採用されているものである. まず, 関数 $f \in \mathbf{H}^\infty(\mathcal{D}_d, w)$ に対する \mathbf{R} 上の $(2N + 1)$ 点補間公式として, あり得るものを全て考える. ここで N は正整数である. このとき, 補間公式を一つ固定すれば, \mathbf{R} 上の f の近似誤差は f の汎関数 $e_N(f)$ となる. そして, f が $\|f\| \leq 1$ を満たしつつ $f \in \mathbf{H}^\infty(\mathcal{D}_d, w)$ を動くときの $e_N(f)$ の最大値が最小となるような補間公式を選び出すことを考える. このために, $e_N(f)$ の f に関する最大値の最小値を

$$E_N^{\min}(\mathbf{H}^\infty(\mathcal{D}_d, w))$$

$$:= \inf_{1 \leq l \leq N} \inf_{\substack{m_{-l}, \dots, m_l \\ m_{-l} + \dots + m_l = 2N+1}} \inf_{\substack{a_j \in \mathcal{D}_d \\ \text{distinct}}} \inf_{\phi_{jk}} \left[\sup_{\|f\| \leq 1} \sup_{x \in \mathbf{R}} \left| f(x) - \sum_{j=-l}^l \sum_{k=0}^{m_j-1} f^{(k)}(a_j) \phi_{jk}(x) \right| \right], \quad (2.4)$$

で定義する. ここで, ϕ_{jk} は \mathcal{D}_d 上の正則関数とする. 仮定 2 から, 一般性を失うことなく, 標本点集合 $\{a_j\}$ としては原点对称なもののみを考えればよい. この $E_N^{\min}(\mathbf{H}^\infty(\mathcal{D}_d, w))$ の値を実現する近似公式を, 本稿では最適公式と定める. 最適公式を求めることは, 基底関数 ϕ_{jk} と標本点 a_j を求めることに他ならない.

2.3 ポテンシャル論の基本事項

E. B. Saff と V. Totik による書籍 [6] に沿って, 本研究で必要な場合限定して, ポテンシャル論の基本事項を手短に述べる. より詳しい説明は [6] または [15, §2.3] を参照されたい. まず, 領域 \mathcal{D}_d の Green 関数は $g_{\mathcal{D}_d}(x, z) = -\log |\tanh((\pi/(4d))(x-z))|$ であるので, $\text{supp } \mu \in \mathbf{R}$ を満たす Borel 測度 μ に関する \mathcal{D}_d の **Green** ポテンシャルと呼ばれるものが

$$U_{\mathcal{D}_d}^\mu(x) = - \int_{\mathbf{R}} \log \left| \tanh \left(\frac{\pi}{4d}(x-z) \right) \right| d\mu(z) \quad (2.5)$$

で定義される. そして, このポテンシャルの $U_{\mathcal{D}_d}^\mu$ の外場 $\log w(x)^{-1}$ のもとでのエネルギーが

$$I_w^{\mathcal{D}_d}(\mu) = \int_{\mathbf{R}} \int_{\mathbf{R}} \left(g_{\mathcal{D}_d}(x, z) - \log(w(x)w(z))^{1/M} \right) d\mu(z)d\mu(x) \quad (2.6)$$

$$= \int_{\mathbf{R}} \int_{\mathbf{R}} \left(-\log \left| \tanh \left(\frac{\pi}{4d}(x-z) \right) \right| - \log(w(x)w(z))^{1/M} \right) d\mu(z)d\mu(x) \quad (2.7)$$

で定義される. このエネルギーの最小値を与えるような測度 μ を均衡測度という.

次の定理は [6, 定理 II.5.10] を少し変えたもので, w に対する仮定 1-3 のもとで均衡測度 μ の一意的存在を示すものである.

定理 2.1. 関数 w が仮定 1-3 を満たすとする. また, M を正の実数とし,

$$V_w^{\mathcal{D}_d} := \inf_{\mu \in \mathcal{M}(\mathbf{R}, M)} I_w^{\mathcal{D}_d}(\mu) \quad (2.8)$$

とおく. ここで $\mathcal{M}(\mathbf{R}, M)$ は, \mathbf{R} 上の Borel 測度で全測度が M に等しいもの全体の集合である. このとき以下が成立する.

1. $V_w^{\mathcal{D}_d}$ は有限値.
2. 測度 $\mu_w^{\mathcal{D}_d} \in \mathcal{M}(\mathbf{R}, M)$ で

$$I_w^{\mathcal{D}_d}(\mu_w^{\mathcal{D}_d}) = V_w^{\mathcal{D}_d}. \quad (2.9)$$

を満たすものが一意的に存在する. また, $\mu_w^{\mathcal{D}_d}$ の台はコンパクトである.

3 関数近似公式の設計法の概要

本節では, [15] の第 3 節および 4 節で詳説した, 関数近似公式の設計法の概要を述べる. 基本の方針は, 第 2.2 節で定義した $E_N^{\min}(\mathbf{H}^\infty(\mathcal{D}_d, w))$ を達成する近似公式を求めることである. 出発点は次の命題である. これは [8] の補題 4.3 を w が偶関数の場合に制限したものである.

命題 1 ([8, 補題 4.3]). 重み関数 w が仮定 1 と 2 を満たすとする. このとき,

$$\begin{aligned} & E_N^{\min}(\mathbf{H}^\infty(\mathcal{D}_d, w)) \\ &= \inf_{a_\ell \in \mathbf{R}} \left[\sup_{\|f\| \leq 1} \sup_{x \in \mathbf{R}} \left| f(x) - \sum_{k=-N}^N f(a_k) \frac{B_{N;k}(x; \{a_\ell\}, \mathcal{D}_d) w(x)}{B_{N;k}(a_k; \{a_\ell\}, \mathcal{D}_d) w(a_k)} \frac{4d}{\pi} T'(a_k - x) \right| \right] \\ &= \inf_{a_\ell \in \mathbf{R}} \left[\sup_{x \in \mathbf{R}} |B_N(x; \{a_\ell\}, \mathcal{D}_d) w(x)| \right] \end{aligned} \quad (3.1)$$

が成り立つ. ここで

$$T(x) = \tanh\left(\frac{\pi}{4d}x\right), \quad (3.2)$$

$$B_N(x; \{a_\ell\}, \mathcal{D}_d) = \prod_{k=-N}^N \tanh\left(\frac{\pi}{4d}(x - a_k)\right), \quad (3.3)$$

$$B_{N;k}(x; \{a_\ell\}, \mathcal{D}_d) = \prod_{\substack{-N \leq m \leq N, \\ m \neq k}} \tanh\left(\frac{\pi}{4d}(x - a_m)\right) \quad (3.4)$$

である.

この命題から, 式 (3.1) の値を達成する標本点集合 $\{a_\ell\}$ が求めれば, 補間に用いられる基底関数も決まり,

$$\tilde{f}_N(x) = \sum_{k=-N}^N f(a_k) \frac{B_{N;k}(x; \{a_\ell\}, \mathcal{D}_d) w(x)}{B_{N;k}(a_k; \{a_\ell\}, \mathcal{D}_d) w(a_k)} \frac{4d}{\pi} T'(a_k - x)$$

が最適近似公式となることが分かる. そこで, 式 (3.1) を標本点集合 $\{a_\ell\}$ に関する最適化問題と見なし, これを解くことを考える. この問題をポテンシャル論の枠組みに持ち込むために, 対数を利用して

$$\log |B_N(x; \{a_\ell\}, \mathcal{D}_d) w(x)| = V_{\mathcal{D}_d}^{\sigma_a}(x) + \log w(x) \quad (3.5)$$

とする. ここで

$$V_{\mathcal{D}_d}^{\sigma_a}(x) = \sum_{k=-N}^N \log \left| \tanh\left(\frac{\pi}{4d}(x - a_k)\right) \right| \quad (3.6)$$

である. これは式 (2.5) において, 測度 μ を

$$\mu(z) = \sigma_a(z) := \sum_{k=-N}^N \delta(z - a_k)$$

とした場合の Green ポテンシャルの (-1) 倍である. ここで δ は Dirac のデルタ関数を表す. 以下, 一般の測度 μ に対して $V_{\mathcal{D}_d}^\mu = -U_{\mathcal{D}_d}^\mu$ と表すことにする. 式 (3.5) より, 式 (3.1) の最適化問題は次の問題と等価である.

問題 1.

$$\inf_{a_\ell \in \mathbf{R}} \left[\sup_{x \in \mathbf{R}} \left(V_{\mathcal{D}_d}^{\sigma_a}(x) + \log w(x) \right) \right] \quad (3.7)$$

の最適値を達成する標本点の列 $\{a_\ell\}$ を求めよ.

この問題 1 の解が容易に求まればよいのだが, これは言わば離散測度に限定して最適測度を探す問題になっており, 難しい. そこで条件を緩和し, より一般の \mathbf{R} 上の Borel 測度 $\mu_N \in \mathcal{M}(\mathbf{R}, 2(N+1))$ を対象にした次の近似問題を考えることにする. ここで $\mu_N(\mathbf{R}) = 2(N+1)$ の制約は, 元の問題 1 の全標本点数が $2N+1$ であるという制約に対応している⁸.

問題 2.

$$\inf_{\substack{\mu_N \in \mathcal{M}(\mathbf{R}, 2(N+1)) \\ \text{supp } \mu_N = [-\alpha_N, \alpha_N]}} \left[\sup_{x \in \mathbf{R}} \left(V_{\mathcal{D}_d}^{\mu_N}(x) + \log w(x) \right) \right]. \quad (3.8)$$

の最適値を達成する正の実数 α_N と測度 $\mu_N \in \mathcal{M}(\mathbf{R}, 2(N+1))$ を求めよ.

ポテンシャル論によれば, 問題 2 は実は定理 2.1 の式 (2.8) で表されるエネルギー最小化問題の解の特徴づけを与えていることが示せる. さらにこのエネルギー最小化問題の解は, $V_{\mathcal{D}_d}^{\mu_N}$ の (したがって Green ポテンシャル $U_{\mathcal{D}_d}^{\mu_N}$ の) 関数形によっても特徴づけられる. したがって, 問題 2 は, その $V_{\mathcal{D}_d}^{\mu_N}$ の関数形の条件を満たす測度 μ_N を求める問題に書き換えることができる. 以下では, その書き換えに加え, 解析的取り扱いをやすくするために, 考える測度 μ_N の範囲を $\mu_N \in \mathcal{M}(\mathbf{R}, 2(N+1)) \cap C^2(-\alpha_N, \alpha_N)$ に限定する. この意味は, $\mathcal{M}(\mathbf{R}, 2(N+1))$ の元を \mathbf{R} 上の単調関数と同一視し, そのうち 2 回連続的微分可能なものを考えるということである. 以上の書き換えと解の範囲の限定を行った結果が次の問題 3 である.

問題 3. 積分方程式と積分不等式からなる系

$$V_{\mathcal{D}_d}^{\mu_N}(x) + \log w(x) = -K_N \quad \text{for any } x \in [-\alpha_N, \alpha_N], \quad (3.9)$$

$$V_{\mathcal{D}_d}^{\mu_N}(x) + \log w(x) \leq -K_N \quad \text{for any } x \in \mathbf{R} \setminus [-\alpha_N, \alpha_N] \quad (3.10)$$

を満たすような実数 α_N, K_N と, 測度 $\mu_N \in \mathcal{M}(\mathbf{R}, 2(N+1)) \cap C^2(-\alpha_N, \alpha_N)$ を求めよ.

⁸ 全測度を $2N+1$ としていないのは, 最終的に設計する近似公式の誤差評価を行う際の技術的理由による.

問題 3 の条件式は、関数 $V_{\mathcal{D}_d}^{\mu_N}(x) + \log w(x)$ が区間 $[-\alpha_N, \alpha_N]$ では一定値で、その区間の外側ではその一定値以下になるという条件を表している。

このように、問題 3 の条件式は \mathbf{R} 全体における関数 $V_{\mathcal{D}_d}^{\mu_N}$ の形状を与えてはいない。しかし、実は $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ の関数 $V_{\mathcal{D}_d}^{\mu_N}(x + iy)$ が二重連結領域 $\mathcal{D}_d \setminus [-\alpha_N, \alpha_N]$ 上の調和関数となることを使えば、Laplace 方程式を解くことによって、この領域上の $V_{\mathcal{D}_d}^{\mu_N}$ の具体形を与えることができる⁹。実際には、 \mathbf{R} における $V_{\mathcal{D}_d}^{\mu_N}$ の具体形 v^* さえ求めれば十分なので、[15] では、この Laplace 方程式の部分的な解析的近似解を用いている。この具体形 v^* は未知パラメータ α_N および K_N を含んでいるので、これらをまず決定し、次いで方程式 $V_{\mathcal{D}_d}^{\mu_N} = v^*$ を \mathbf{R} 上で解く必要がある。この各手順を具体的な問題の形に書くと次のとおりとなる。

問題 4. 以下の問題の解を求めよ。

SP1 制約条件 $\mu_N \in \mathcal{M}(\mathbf{R}, 2(N+1)) \cap C^2(-\alpha_N, \alpha_N)$ のもとでパラメータ α_N, K_N を求め、 \mathbf{R} における $V_{\mathcal{D}_d}^{\mu_N}$ の具体形 v^* を求めよ。

SP2 SP1 で求めた $\alpha_N, K_N, V_{\mathcal{D}_d}^{\mu_N}$ に対する解をそれぞれ α_N^*, K_N^*, v^* とする。このとき、 \mathbf{R} 上の方程式 $V_{\mathcal{D}_d}^{\mu_N} = v^*$ 、すなわち

$$\int_{-\alpha_N^*}^{\alpha_N^*} \log \left| \tanh \left(\frac{\pi}{4d}(x-z) \right) \right| d\mu_N(z) = v^*(x) \quad x \in \mathbf{R}, \quad (3.11)$$

を解き、 μ_N を求めよ。

問題 4 の SP1 では、一度未知パラメータを含んだ形で方程式 (3.11) の解を書き下し、それに $\mu_N(\mathbf{R}) = 2(N+1)$ の条件と v^* の滑らかさの条件を使うことで α_N, K_N を決める。方程式 (3.11) の解を書き下す際には Fourier 変換を用い、実際の数値計算では高速 Fourier 変換 (FFT) を用いる。

以上に述べた問題同士の関係を整理すると以下のようなになる。

問題 1…最適標本点集合 $\{a_\ell\}$ を決める最適化問題

↓ 標本点集合の測度による近似

問題 2…最適測度 μ_N を決める最適化問題

↓ 測度 μ_N の範囲の制限およびポテンシャル論による特徴づけ

問題 3…滑らかな測度 μ_N を求めるための方程式・不等式系

↓ Green ポテンシャルの調和性を用いた再定式化

問題 4

SP1…問題 3 の未知パラメータと $V_{\mathcal{D}_d}^{\mu_N}$ を決める問題

SP2…測度 μ_N を決める問題

⁹ 領域 \mathcal{D}_d は複素領域であるが、ここでは \mathbf{R}^2 の領域と同一視している。境界条件は、 $\partial\mathcal{D}_d$ において $V_{\mathcal{D}_d}^{\mu_N} = 0$, $[-\alpha_N, \alpha_N]$ において $V_{\mathcal{D}_d}^{\mu_N} = -\log w - K_N$ である。前者の境界条件は Green ポテンシャルの一般的性質である。

以上をもとに、重み付きハーディ空間上の高精度関数近似公式を設計する手順を以下のように構成することができる。

1. 与えられた d および w , N に対し、問題 4 の SP1 を数値的に解き、数値解 $\tilde{\alpha}_N^*$ および \tilde{K}_N^* を求める。
2. 問題 4 の SP2 を数値的に解き、 $x \in [-\tilde{\alpha}_N^*, \tilde{\alpha}_N^*]$ に対する $\nu_N := \mu'_N$ の数値解 $\tilde{\nu}_N$ を求める¹⁰。
3. $x \in [-\tilde{\alpha}_N^*, \tilde{\alpha}_N^*]$ に対し不定積分 $I[\tilde{\nu}_N](x) := \int_0^x \tilde{\nu}_N(t) dt$ を計算する。
4. $I[\tilde{\nu}_N]$ の逆関数 $I[\tilde{\nu}_N]^{-1}$ を計算する。
5. 標本点 a_i を $a_i = I[\tilde{\nu}_N]^{-1}(i)$ ($i = -N, \dots, N$) のように生成する。
6. 近似公式 \tilde{f}_N を

$$\tilde{f}_N(x) := \sum_{j=-N}^N f(a_j) \frac{B_{N:j}(x; \{a_i\}, \mathcal{D}_d) w(x)}{B_{N:j}(a_j; \{a_i\}, \mathcal{D}_d) w(a_j)} \frac{4d}{\pi} T'(a_j - x) \quad (3.12)$$

とする。

問題 1 から問題 4 に至る過程にはいくつも近似が入っているので、ここで設計した公式 (3.12) は、 $E_N^{\min}(\mathbf{H}^\infty(\mathcal{D}_d, w))$ を達成するという意味で厳密に最適な公式となる保証はない。したがって最適性の保証される公式を設計することは今後の課題であるが、公式 (3.12) が十分最適に近いものであることは期待できる。実際、重み関数 w が一重指数関数的な減衰度を持つ場合には、すでに最適であることが知られている Ganelius の公式と同等の精度を持つ公式が作れることが、理論的にも実験的にも示されている [15]。なお [15] では、 w が一般の場合に理論的な誤差評価を与える方法および、公式 (3.12) をいくつかの具体的な関数に適用した数値例が示されている。特に、重み関数 w が二重指数関数的に減衰する場合には、DE-Sinc 公式を大きく超える精度が達成されている。

4 数値積分公式の設計

関数近似公式 (3.12) を x について $(-\infty, \infty)$ で積分することで、形式的には数値積分公式が設計できる。すなわち、

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx \approx \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}_N(x) dx = \sum_{j=-N}^N c_{N:j}(\{a_i\}, \mathcal{D}_d, w) f(a_j) \quad (4.1)$$

のようにすることができる。ここで、

$$c_{N:j}(\{a_i\}, \mathcal{D}_d, w) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{B_{N:j}(x; \{a_i\}, \mathcal{D}_d) w(x)}{B_{N:j}(a_j; \{a_i\}, \mathcal{D}_d) w(a_j)} \frac{4d}{\pi} T'(a_j - x) dx \quad (4.2)$$

¹⁰ ここで $\mathcal{F}[\tilde{\nu}_N]$ の逆 Fourier 変換を計算するために FFT を用いる。

である．公式 (4.1) は，最適公式を目指して設計された関数近似公式 (3.12) から導かれたものであるが，重み付きハーディ空間 $\mathbf{H}^\infty(\mathcal{D}_d, w)$ における数値積分公式としての最適性との関係は現時点では分かっていない．しかし，十分高精度な公式になることを期待して，本稿ではこれを実験的に使用してみる．

公式 (4.1) を実際に用いる際には，与えられた d および w ， N について予め式 (4.2) の $c_{N:j}$ の値を計算しておけばよい．しかし，一般には式 (4.2) の積分は解析的に実行できないため， $c_{N:j}$ の計算のためには数値積分を行う必要がある．この数値積分は，仮に $c_{N:j}$ が厳密に与えられたとした場合に公式 (4.1) で実現される精度よりも高い精度で行われなければ意味がない．また，そのように高精度で数値積分を行うためにも膨大な計算コストがかかると，新たに公式 (4.1) を設計する意味が薄れるため，計算コストは軽減すべきである．したがって，式 (4.2) の積分を高精度かつ効率的に計算する方法を考える必要がある．しかし，本稿ではこれは今後の課題とし，式 (4.2) の積分を，十分小さい刻み幅と十分多くの標本点を持つ台形公式

$$c_{N:j}(\{a_i\}, \mathcal{D}_d, w) \approx \tilde{h} \sum_{k=-n}^n \frac{B_{N:j}(k\tilde{h}; \{a_i\}, \mathcal{D}_d) w(k\tilde{h})}{B_{N:j}(a_j; \{a_i\}, \mathcal{D}_d) w(a_j)} \frac{4d}{\pi} T'(a_j - k\tilde{h}) \quad (4.3)$$

により計算することにする¹¹．

5 数値実験

数値実験のための例として，以下の関数を使用した．例 5.1 と例 5.2 は，いずれも一重指数関数的減衰関数に分類される．

例 5.1 (指数関数的減衰関数)．

$$f(x) = \operatorname{sech}(2x), \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \frac{\pi}{2}. \quad (5.1)$$

例 5.2 (Gaussian 関数的減衰関数)．

$$f(x) = \frac{x^2}{(\pi/4)^2 + x^2} \exp(-x^2), \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \sqrt{\pi} - \frac{\pi^2 \exp((\pi/4)^2)}{4} \operatorname{erfc}\left(\frac{\pi}{4}\right). \quad (5.2)$$

例 5.3 (二重指数関数的 (DE) 減衰関数)．

$$f(x) = \frac{\pi \cosh(2x)}{\cosh((\pi/2) \sinh(2x))}, \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \pi. \quad (5.3)$$

それぞれの例に対して，本稿で考案した数値積分公式 (4.1) を用いて積分の近似値を計算し，真の値との差の絶対値を計算した．それぞれの例に対する重み付きハーディ空間 $\mathbf{H}^\infty(\mathcal{D}_d, w)$

¹¹ 式 (4.2) の被積分関数には重み関数 w が掛かった形をしており，また $T'(x) = (\pi/(4d)) \operatorname{sech}^2((\pi/(4d))x)$ であるから，この被積分関数は実軸上で急減少する．したがって，台形公式の標本点は，原点のある程度近くにとれば十分であろうと考えられる．

の重み関数と、公式設計に必要な数値データの詳細は以下の表 2 のとおりである。なお、簡単化のため、正則領域の幅を定める d は全ての例において $d = \pi/4$ となるようにしてある。そして、第 1 節で説明した台形公式 (1.8) で $M = N$ としたものとの比較を行った¹²。これは、例 5.1 と例 5.2 のように重み関数 w が一重指数関数的減衰をする場合は SE 公式との比較、例 5.3 のように重み関数 w が二重指数関数的減衰をする場合は DE 公式との比較を行っていることになる。なお、台形公式の標本点間隔 h の定め方は、整数 N と重み関数 w に依存する。これについては付録 A で説明した。全ての計算は MATLAB によるプログラムを用い、倍精度浮動小数演算で行った。

表 2 各例に対する空間 $H^\infty(\mathcal{D}_{\pi/4}, w)$ の重み関数 w と公式設計に必要な数値データ

	重み関数 $w(x)$	公式 (4.1) の N	台形公式 (4.3) の n と \tilde{h}
例 5.1	$\operatorname{sech}(2x)$	$N = 5, \dots, 100$ (5 刻み)	$(n, \tilde{h}) = (500, 0.04)$
例 5.2	$\exp(-x^2)$	$N = 5, \dots, 50$ (5 刻み)	$(n, \tilde{h}) = (500, 0.02)$
例 5.3	$\operatorname{sech}((\pi/2) \sinh(2x))$	$N = 5, \dots, 25$ (5 刻み)	$(n, \tilde{h}) = (500, 0.005)$

以上の数値実験の結果を図 1-3 に示す。これらを見ると、提案した公式 (4.1) は台形公式 (1.8) に近い精度を示しており、特に例 5.1 の場合はほぼ同等であるが、例 5.2 と例 5.3 の場合は台形公式より精度は悪くなっていることが分かる。そこで以後、提案した公式 (4.1) の理論的な精度の解析や、精度と計算効率の改良方法、最適性との関係などを今後の課題とし、引き続き追究することとしたい¹³。なお、公式の精度の改良方法を考えるヒントになりうる数値実験結果を、付録 B に示した。

¹² 重み関数 w に対する仮定 2 より、実軸上の原点の両側には、同じくらい外側まで標本点をとればよいからである。

¹³ 数値計算結果を見ればわかる通り、特に Gaussian 減衰関数や二重指数関数的減衰関数の場合は、台形公式 (1.8) でも提案した公式 (4.1) でも、 N の増加に伴い急激に精度が上がり、すぐに倍精度浮動小数点数で可能な 10 進数表示桁数の限界 ($10^{-15} \sim 10^{-16}$ 程度) に到達してしまう。そのため、より大きい N で詳しく様子を見るためには多倍長演算などを用いて計算すべきであるが、これは非常に負荷の大きい計算になるため、積分 (4.2) の効率的な計算法と合わせて今後の課題としたい。

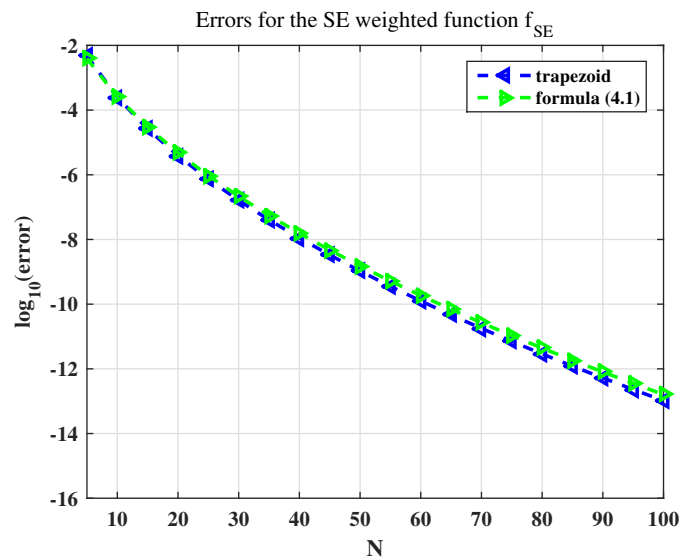


図1 例 5.1 に対する数値積分の誤差. “trapezoid” が台形公式, “formula (4.1)” が公式 (4.1) の結果.

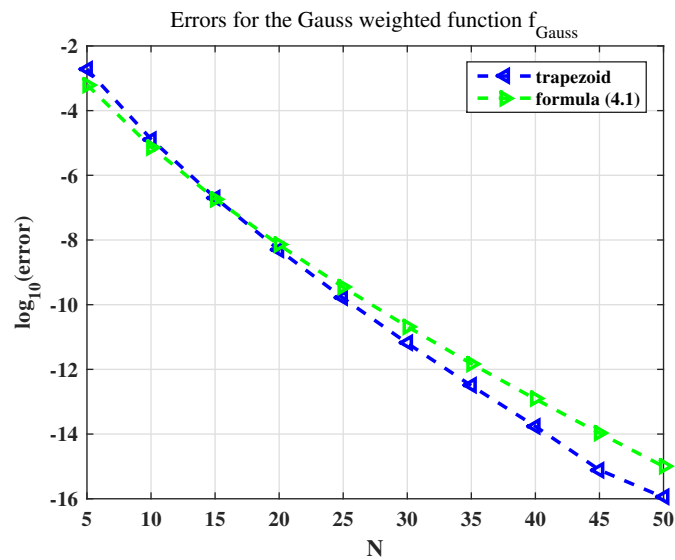


図2 例 5.2 に対する数値積分の誤差. “trapezoid” が台形公式, “formula (4.1)” が公式 (4.1) の結果.

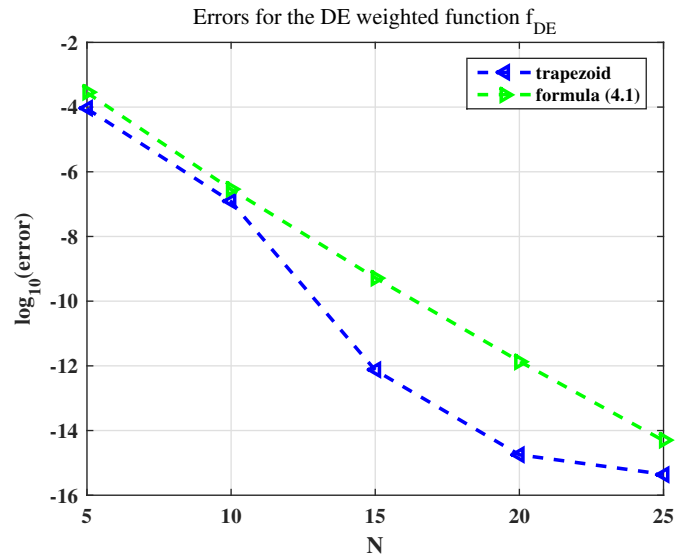


図3 例 5.3 に対する数値積分の誤差. “trapezoid” が台形公式, “formula (4.1)” が公式 (4.1) の結果.

6 まとめ

本稿では, 田中らが論文 [15] で考案した重み付きハーディ空間上の高精度関数近似公式 (3.12) を基にして, 同じ空間上で有効と思われる数値積分公式 (4.1) を提案した. その結果, ある程度は高精度な公式が得られるものの, SE 公式や DE 公式の基となる台形公式と比較して精度が良いわけではないことが実験的に分かった. また, 実用的観点から, 積分公式を構成する係数 (4.2) の計算をどう高速かつ高精度で行うかという課題も残されている. したがって, 重み付きハーディ空間における最適性を追及した数値積分公式の改良や, 精度の理論的な解析, 実用的観点からの計算の効率化などを今後の主な課題として, 引き続き追究を行おうと考えている.

参考文献

- [1] J.-E. Andersson, Optimal quadrature of H^p functions, Math. Z. **172** (1980), pp. 55–62.
- [2] J.-E. Andersson and B. D. Bojanov, A note on the optimal quadrature in H^p , Numer. Math. **44** (1984), pp. 301–308.
- [3] P. J. Davis and P. Rabinowitz, Methods of numerical integration, second edition, Dover, New York, 1984.
- [4] M. Mori, Discovery of the double exponential transformation and its developments, Publ. RIMS Kyoto Univ. **41** (2005), pp. 897–935.
- [5] T. Okayama, K. Tanaka, T. Matsuo, and M. Sugihara, DE-Sinc methods have almost

- the same convergence property as SE-Sinc methods even for a family of functions fitting the SE-Sinc methods, Part I: Definite integration and function approximation, Numer. Math. **125** (2013), pp. 511–543.
- [6] E. B. Saff and V. Totik, Logarithmic potentials with external fields, Springer, Berlin Heidelberg, 1997.
- [7] M. Sugihara, Optimality of the double exponential formula — functional analysis approach —, Numer. Math. **75** (1997), pp. 379–395.
- [8] M. Sugihara, Near optimality of the sinc approximation, Math. Comp. **72** (2003), pp. 767–786.
- [9] 杉原 正顯, 室田 一雄, 数値計算法の数理, 岩波書店, 東京, 1994.
- [10] F. Stenger, Numerical methods based on sinc and analytic functions, Springer, New York, 1993.
- [11] F. Stenger, Handbook of sinc numerical methods, CRC Press, Boca Raton, 2011.
- [12] 高橋 秀俊, 複素関数論と数値解析, 「数値解析とコンピューター」, 京都大学数理解析研究所講究録 **253** (1975), pp. 24–37.
- [13] H. Takahasi and M. Mori, Double exponential formulas for numerical integration, Publ. RIMS Kyoto Univ. **9** (1974), pp. 721–741.
- [14] K. Tanaka, M. Sugihara, K. Murota, and M. Mori, Function classes for double exponential integration formulas, Numer. Math. **111** (2009), pp. 631–655.
- [15] K. Tanaka, T. Okayama, and M. Sugihara, Potential theoretic approach to design of highly accurate formulas for function approximation in weighted Hardy spaces, arXiv:1511.04530, 14 Nov. 2015. (<http://arxiv.org/abs/1511.04530>)
- [16] L. N. Trefethen and J. A. C. Weideman, The exponentially convergent trapezoidal rule, SIAM Review **56** (2014), pp. 385–458.

付録 A 台形公式の標本点間隔の定め方

実軸上の台形公式 (1.8) で $M = N$ としたものを考える。これを使用する際には、与えられた整数 N と重み関数 w に応じて、標本点間隔 h を定める必要がある。本節では例 5.1–5.3 のそれぞれの場合に対する定め方を概説する。まず、(1.8) の台形公式の誤差は

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx - h \sum_{k=-N}^N f(kh) \right| = \left| \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx - h \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(kh) + h \sum_{|k|>N} f(kh) \right| \leq E_D(f, h) + E_T(f, h, N) \quad (\text{A.1})$$

と評価される. ここで $E_D(f, h)$ は離散化誤差, $E_T(f, h, N)$ は打ち切り誤差と呼ばれるもので,

$$E_D(f, h) = \left| \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx - h \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(kh) \right|, \quad (\text{A.2})$$

$$E_T(f, h, N) = \left| h \sum_{|k| > N} f(kh) \right| \quad (\text{A.3})$$

である. $E_D(f, h)$ の方は, $f \in \mathbf{H}^\infty(\mathcal{D}_d, w)$ であれば

$$E_D(f, h) \leq C \exp\left(-\frac{2\pi d}{h}\right) \quad (\text{A.4})$$

と評価できることが知られている. ここで C は h に依存しない正の定数である. 一方, $E_T(f, h, N)$ の方は, $f \in \mathbf{H}^\infty(\mathcal{D}_d, w)$ のとき

$$E_T(f, h, N) \leq \|f\| h \sum_{|k| \geq N} w(kh) \quad (\text{A.5})$$

と評価できる. そこで, 各 w に応じて (A.5) 右辺の和を評価することで,

$$\text{例 5.1 : } E_T(f, h, N) \leq C_1 \exp(-2Nh), \quad (\text{A.6})$$

$$\text{例 5.2 : } E_T(f, h, N) \leq C_2 \exp(-(Nh)^2), \quad (\text{A.7})$$

$$\text{例 5.3 : } E_T(f, h, N) \leq C_3 \exp(-(\pi/4) \exp(2Nh)) \quad (\text{A.8})$$

が得られる. ここで C_1, C_2, C_3 は N と h に依存しない正の定数である.

以上の式 (A.4) と式 (A.6)–(A.8) のそれぞれを見ると, 前者の離散化誤差の評価は h に関して増加関数, 後者の打ち切り誤差の評価はいずれも h に関して減少関数となっていることが分かる. そこで, 全体の誤差がほぼ最小となるように, 離散化誤差と打ち切り誤差がほぼ同程度となるように h を決めることにする. 例 5.1 の場合であれば, 式 (A.4) と式 (A.6) の指数部分を等置し, $d = \pi/4$ を代入すれば

$$-\frac{2\pi d}{h} = -2Nh \Rightarrow h = \sqrt{\frac{2\pi d}{2N}} = \frac{\pi}{2\sqrt{N}} \quad (\text{A.9})$$

と決まる. 例 5.2 と例 5.3 の場合も同様にして

$$-\frac{2\pi d}{h} = -(Nh)^2 \Rightarrow h = \left(\frac{2\pi d}{N^2}\right)^{1/3} = \left(\frac{\pi^2}{2N^2}\right)^{1/3}, \quad (\text{A.10})$$

$$-\frac{2\pi d}{h} = -\frac{\pi}{4} \exp(2Nh) \Rightarrow h = \frac{W(16dN)}{2N} = \frac{W(4\pi N)}{2N} \approx \frac{\log(4\pi N)}{2N} \quad (\text{A.11})$$

となる. ここで W は関数 $g(x) = xe^x$ の逆関数で, Lambert の W 関数と呼ばれるものである. 以上より, 第 5 節では, 例 5.1–5.3 に対する台形公式に対して, それぞれ式 (A.9)–(A.11) で定まる h を用いた (式 (A.11) については, \log による近似の方を用いた).

付録 B 補遺としての数値実験

実は、第 3 節と第 4 節で述べた公式の設計方法を一か所だけ変更することにより、数値積分の精度を向上させることができています。この事実については理論的な裏付けはまだないが、今後の考察の材料とするため、ここに記しておく。

その変更とは、

$$\text{重み関数 } w \text{ を } w^{1/2} \text{ に置き換えて第 3 節末尾の手順 } \dots (*) \text{ を実行する} \quad (\text{B.1})$$

ことである。要点は実軸上の指数的減衰度が 1/2 倍になった重み関数を使用することである。このとき $w^{1/2}$ は一般には仮定 1 を満たすとは限らないので、本来は、与えられた実軸上の指数的減衰度が 1/2 倍であって仮定 1 を満たすような重み関数 \tilde{w} を用意すべきである。しかし、手順 (*) 自体は重み関数の実軸上で値があれば実行可能なので、 \tilde{w} は $w^{1/2}$ で十分代替できると考えて、このようにした。数値計算結果を示すと以下の図 4-6 のとおりである。確かに数値積分の精度が向上していることが見て取れる。

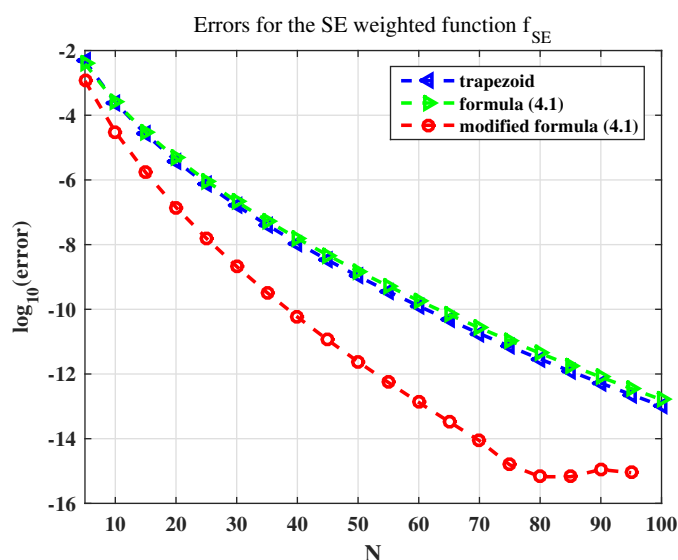


図 4 例 5.1 に対する数値積分の誤差. “trapezoid” が台形公式, “formula (4.1)” が公式 (4.1), “modified formula (4.1)” が公式 (4.1) に (B.1) の変更を加えたものの結果.

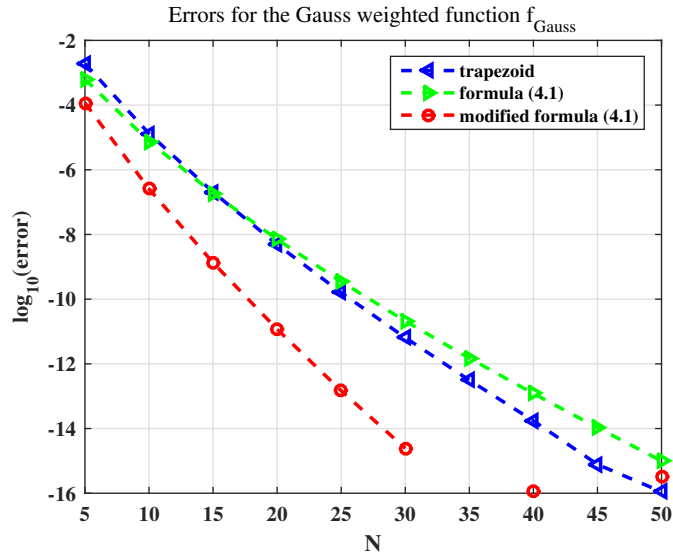


図5 例 5.2 に対する数値積分の誤差. “trapezoid” が台形公式, “formula (4.1)” が公式 (4.1), “modified formula (4.1)” が公式 (4.1) に (B.1) の変更を加えたものの結果. この変更を加えた結果のうち $N = 35, 45$ の場合は, 倍精度浮動小数点の範囲で誤差が 0 と計算されたため, データがグラフに表れていない.

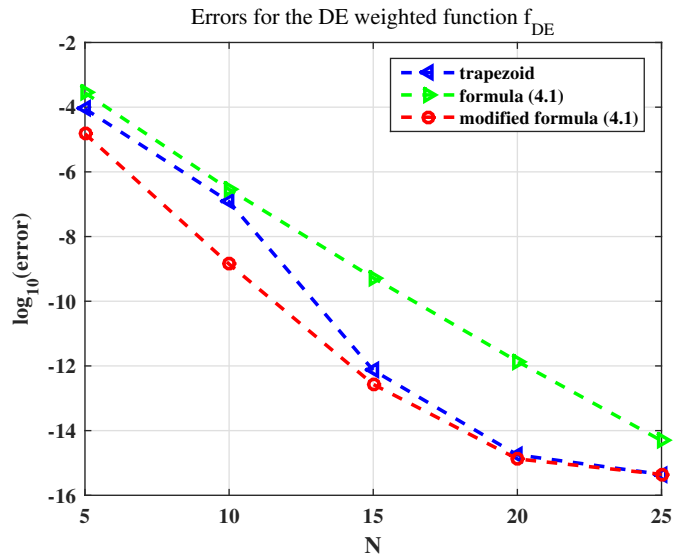


図6 例 5.3 に対する数値積分の誤差. “trapezoid” が台形公式, “formula (4.1)” が公式 (4.1), “modified formula (4.1)” が公式 (4.1) に (B.1) の変更を加えたものの結果.

(原稿提出: 2015 年 12 月 18 日; 修正稿提出: 2016 年 1 月 25 日)