

ネガティブフィードバックモデルの解の構造を保存した離散化および超離散化について

メタデータ	言語: Japanese 出版者: 武蔵野大学数理工学センター 公開日: 2025-12-02 キーワード: 作成者: 松家, 敬介 メールアドレス: 所属:
URL	https://mu.repo.nii.ac.jp/records/2000775

ネガティブフィードバックモデルの解の構造を保存した離散化および超離散化について

Discretization and Ultradiscretization of negative feedback model preserving the structure of the solutions

松家 敬介¹

Keisuke Matsuya

概要

本論文ではネガティブフィードバック機構を数理モデル化した常微分方程式系に対して、平衡解の安定性を保存した離散化を行い、さらに超離散化して得られた差分方程式の解構造について調べた。その結果、超離散化で得られた差分方程式に対して差分刻みに対応するパラメータを無限大にする極限を施すと元の常微分方程式系の解構造と同じものとなることがわかった。

1 はじめに

本論文では以下の常微分方程式系:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y - x \\ \frac{dy}{dt} = \frac{1}{1+x^m} - \frac{y}{b} \end{cases} \quad (1)$$

について議論する。ただし、 $x = x(t)$, $y = y(t)$ ($t \geq 0$), $m, b > 0$ とする。(1) は生化学など現れる 2 種類の物質のうち一方の物質が他方の物質の生成を抑制するネガティブフィードバック機構をモデル化したものとして知られている [1]。(1) には漸近安定な平衡解 $(x, y) \equiv (\alpha, \alpha)$ がある。ただし、 α は a の方程式:

$$a^{m+1} + a - b = 0 \quad (2)$$

の正の解とする。

注意 $m, b > 0$ より、(2) の正の解はただ一つしかないことに注意する。

著者は微分方程式の解の構造を保存した離散化および超離散化の構成に興味がある。先行研究 [2] において (1) の離散化および超離散化について議論がなされており、そこで述べられていることを紹介する。(1) の離散化として [2] で議論されている差分方程式は以下のようなもの

¹ 武蔵野大学数理工学センター員 / 武蔵野大学工学部数理工学科准教授

ネガティブフィードバックモデルの解の構造を保存した離散化および超離散化について (松家)

である.

$$\begin{cases} \frac{x_{n+1} - x_n}{\delta} = y_n - x_{n+1} \\ \frac{y_{n+1} - y_n}{\delta} = \frac{1}{1 + (x_n)^m} - \frac{y_{n+1}}{b} \end{cases}$$

ただし, $\delta > 0$, $x_n = x(\delta n)$, $y_n = y(\delta n)$ ($n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$) とする. それぞれの方程式を整理することで,

$$\begin{cases} x_{n+1} = \frac{x_n + \delta y_n}{1 + \delta} \\ y_{n+1} = \frac{y_n + \frac{\delta}{1 + (x_n)^m}}{1 + \frac{\delta}{b}} \end{cases} \quad (3)$$

が得られる. (3) に対して, 変数変換 $x_n = \exp \frac{X_n}{\varepsilon}$, $y_n = \exp \frac{Y_n}{\varepsilon}$, $\delta = \exp \frac{D}{\varepsilon}$, $b = \exp \frac{B}{\varepsilon}$ を施し, 極限 $\varepsilon \rightarrow +0$ をとることで,

$$\begin{cases} X_{n+1} = \max[X_n, D + Y_n] - \max[0, D] \\ Y_{n+1} = \max[Y_n, D - \max[0, mX_n]] - \max[0, D - B] \end{cases}$$

が得られ, さらに極限 $D \rightarrow +\infty$ をとることで,

$$\begin{cases} X_{n+1} = Y_n \\ Y_{n+1} = B - \max[0, mX_n] \end{cases} \quad (4)$$

が得られる. (3) および (4) はパラメータ b , δ , m , B によって解の挙動に変化が生じ, 特に振動解が得られる. 元の微分方程式系 (1) とは異なる解の構造を (3) および (4) が有していることを示している. また, (3) には (1) の平衡解と同じ形の平衡解 $(x_n, y_n) \equiv (\alpha, \alpha)$ があるが, 離散化によって生じたパラメータ δ の値によってその安定性が変化してしまうこともわかる.

筆者は非負値解をもつ微分方程式に対して, 減法が入らないような離散化であって元の方程式の平衡解の安定性も保存したもの [3] を提案している. [3] で提案した手法を用いて, 単独の常微分方程式の解の構造を保存した離散化および超離散化についても先行研究 [4] で議論した. [3] では連立の常微分方程式系に対しても平衡解の安定性を保存した離散化の手法についても議論しており, 本論文ではその具体例として (1) の解の構造を保存した離散化および超離散化について考察する.

2 (1) の平衡解の安定性を保存した離散化

本節では [3] で提案した手法を用いて, (1) の離散化を行い, 得られた差分方程式系の平衡解の安定性について議論する. (1) を

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y - x \\ \frac{dy}{dt} = \frac{1}{1 + x^m} + \frac{m}{b}y - \frac{m+1}{b}y \end{cases}$$

と変形しておき、離散化することで以下の差分方程式を得られる.

$$\begin{cases} \frac{x_{n+1} - x_n}{\delta} = y_{n+1} - x_{n+1} \\ \frac{y_{n+1} - y_n}{\delta} = \frac{1}{1 + (x_n)^m} + \frac{m}{b}y_n - \frac{m+1}{b}y_{n+1} \end{cases}$$

それぞれの方程式を変形することで,

$$\begin{cases} x_{n+1} = \frac{x_n + \delta y_n}{1 + \delta} \\ y_{n+1} = \frac{y_n + \delta \left\{ \frac{1}{1 + (x_n)^m} + \frac{m}{b}y_n \right\}}{1 + \frac{\delta(m+1)}{b}} \end{cases} \quad (5)$$

が得られる. (5) には (1) と同じ形の漸近安定な平衡解 $(x_n, y_n) \equiv (\alpha, \alpha)$ がある. 漸近安定になることは以下のようにして確認できる.

$$x_n = \alpha + \xi_n, \quad y_n = \alpha + \eta_n \quad (|\xi_n|, |\eta_n| \ll 1)$$

として, (5) を平衡解 $(x_n, y_n) \equiv (\alpha, \alpha)$ のまわりで線形化すると次の方程式が得られる.

$$\begin{cases} \xi_{n+1} = \frac{1}{1 + \delta}\xi_n + \frac{\delta}{1 + \delta}\eta_{n+1} = \tilde{A}_{11}\xi_n + \tilde{A}_{12}\eta_{n+1} \\ \eta_{n+1} = -\frac{\frac{\delta m \alpha^{m-1}}{(1 + \alpha^m)^2}}{1 + \frac{\delta(m+1)}{b}}\xi_n + \frac{1 + \frac{\delta m}{b}}{1 + \frac{\delta(m+1)}{b}}\eta_n = \tilde{A}_{21}\xi_n + \tilde{A}_{22}\eta_n \end{cases}$$

これらの線形の方程式は,

$$\begin{pmatrix} \xi_{n+1} \\ \eta_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{A}_{11} + \tilde{A}_{12}\tilde{A}_{21} & \tilde{A}_{12}\tilde{A}_{22} \\ \tilde{A}_{21} & \tilde{A}_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_n \\ \eta_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \xi_n \\ \eta_n \end{pmatrix}$$

と変形でき, 平衡解 $(x_n, y_n) \equiv (\alpha, \alpha)$ が漸近安定となる条件は, 2 次正方行列 A の全ての固有値の絶対値が 1 より小さいことであり, これは以下の不等式と同値である.

$$1 + \text{tr}A + \det A > 0 \quad (6)$$

$$1 - \text{tr}A + \det A > 0 \quad (7)$$

$$\det A < 1 \quad (8)$$

(7) は (1) の平衡解が漸近安定になる条件と一致しており, (8) は (1) の平衡解が漸近安定になる条件と類似したものとなっている [4]. したがって, (7) の不等式は既に満足されており, 残りの (6) および (8) は,

$$1 + \text{tr}A + \det A = \frac{4 + 2\delta \left(1 + \frac{2m+1}{b}\right) + \delta^2 \left(\frac{m+1}{b} + \frac{m\alpha}{b^2}\right)}{(1 + \delta) \left\{1 + \frac{\delta(m+1)}{b}\right\}} > 0$$

$$1 - \det A = \frac{\delta \left(1 + \frac{1}{b}\right) + \frac{\delta^2(m+1)}{b}}{(1 + \delta) \left\{1 + \frac{\delta(m+1)}{b}\right\}} > 0$$

より, 確かに成立していることが確認できる.

3 (5) の超離散化

本節では (5) を超離散化し, 得られた差分方程式の解の構造について議論する.

(5) に対して, 変数変換 $x_n = \exp \frac{X_n}{\varepsilon}$, $y_n = \exp \frac{Y_n}{\varepsilon}$, $\delta = \exp \frac{D}{\varepsilon}$, $b = \exp \frac{B}{\varepsilon}$ を施し, 極限 $\varepsilon \rightarrow +0$ をとることで,

$$\begin{cases} X_{n+1} = \max [X_n, D + Y_{n+1}] - \max [0, D] \\ Y_{n+1} = \max [Y_n, D + \max [-\max [0, mX_n], Y_n - B]] - \max [0, D - B] \end{cases} \quad (9)$$

が得られる. (1) および (3) の場合と同様に (9) に対しても平衡解を求めることができる. 実際に (9) の X および Y の添え字を取り払った連立方程式を解くことで平衡解が相平面図においてどのように位置しているかがわかる. (9) に含まれるパラメータ B , D の値によって平衡解が変化するので以下の場合分けを行う.

1. $B \leq D \leq 0$
2. $D \leq 0$ かつ $D < B$
3. $0 < D \leq B$
4. $0 \leq B < D$
5. $B < 0 < D$

それぞれの場合について平衡解を明示し, 解の構造をまとめると以下のようなになる.

1. $B \leq D \leq 0$

(9) の平衡解を $(X_n, Y_n) \equiv (X_*, Y_*)$ とすると, $B \leq D \leq 0$ より, 以下が成り立つ.

$$\begin{cases} X_* = \max [X_*, D + Y_*] \\ Y_* = \max [Y_*, D + \max [-\max [0, mX_*], Y_* - B]] - (D - B) \end{cases}$$

さらに, $B \leq D$ より,

$$\begin{aligned} & \max [Y_*, D + \max [-\max [0, mX_*], Y_* - B]] - (D - B) \\ &= \max [Y_* - D + B, B - \max [0, mX_*], Y_*] \\ &= \max [B - \max [0, mX_*], Y_*] \end{aligned}$$

となることから, (X_*, Y_*) は (X, Y) 平面の

$$\begin{cases} X \geq D + X \\ Y \geq B - \max [0, mX] \end{cases}$$

を満たす図 1 の領域上の点となる.

(9) に対して, この領域外の点を初期条件として与えると 1 ステップでこの領域の境界に移ることがわかる.

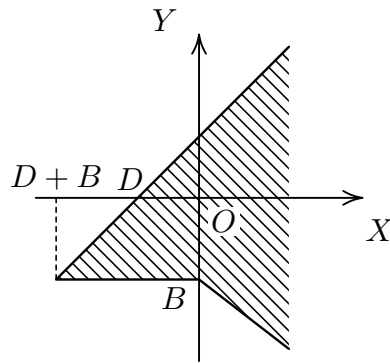


図1 $B \leq D \leq 0$ における (9) の平衡点

2. $D \leq 0$ かつ $D < B$

この場合, (X_*, Y_*) は以下を満たす.

$$\begin{cases} X_* = \max [X_*, D + Y_*] \\ Y_* = \max [Y_*, D + \max [-\max [0, mX_*], Y_* - B]] \end{cases}$$

さらに, $D < B$ より,

$$\begin{aligned} & \max [Y_*, D + \max [-\max [0, mX_*], Y_* - B]] \\ &= \max [Y_*, D - \max [0, mX_*], Y_* + D - B] \\ &= \max [Y_*, D - \max [0, mX_*]] \end{aligned}$$

となることから, (X_*, Y_*) は (X, Y) 平面の

$$\begin{cases} X \geq D + X \\ Y \geq D - \max [0, mX] \end{cases}$$

を満たす図2の領域上の点となる. (9) に対して, この領域外の点を初期条件として与えると1ステップでこの領域の境界に移ることがわかる.

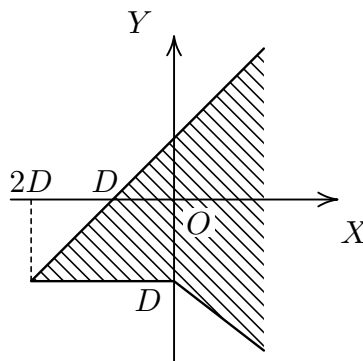


図2 $D \leq 0$ かつ $D < B$ における (9) の平衡点

3. $0 < D \leq B$

この場合, D と B の大小関係は 2. と同じであるから, (X_*, Y_*) は以下を満たす.

$$\begin{cases} X_* = \max [X_*, D + Y_*] - D = \max [X_* - D, Y_*] \\ Y_* = \max [Y_*, D - \max [0, mX_*]] \end{cases}$$

$D > 0$ より, (X_*, Y_*) は (X, Y) 平面の

$$\begin{cases} X = Y \\ Y \geq D - \max [0, mX] \end{cases}$$

を満たす図 3 の半直線上の点となる. (9) に対して, この半直線上にない点を初期条件として与えると有限ステップでこの半直線上に移ることがわかる.

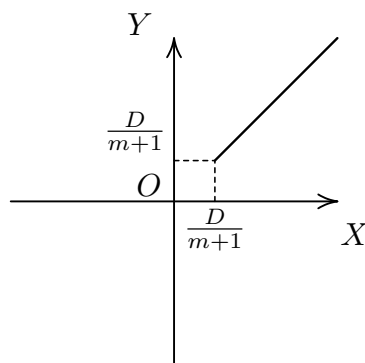


図 3 $0 < D \leq B$ における (9) の平衡点

4. $0 \leq B < D$

この場合, D と B の大小関係は 1. と同じであるから, (X_*, Y_*) は以下を満たす.

$$\begin{cases} X_* = \max [X_*, D + Y_*] - D = \max [X_* - D, Y_*] \\ Y_* = \max [Y_*, B - \max [0, mX_*]] \end{cases}$$

$D > 0$ より, (X_*, Y_*) は (X, Y) 平面の

$$\begin{cases} X = Y \\ Y \geq B - \max [0, mX] \end{cases}$$

を満たす図 4 の半直線上の点となる. (9) に対して, この半直線上にない点を初期条件として与えると有限ステップでこの半直線上に移ることがわかる.

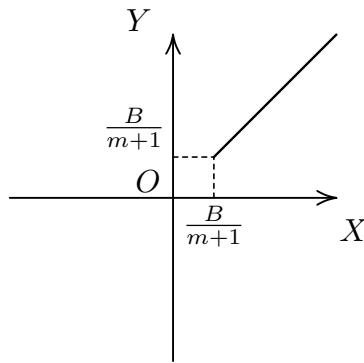


図4 $0 \leq B < D$ における (9) の平衡点

5. $B < 0 < D$

この場合, D と B の大小関係は 4. と同じであるから, (X_*, Y_*) は (X, Y) 平面の

$$\begin{cases} X = Y \\ Y \geq B - \max[0, mX] \end{cases}$$

を満たす図5の半直線上の点となる. (9) に対して, この半直線上にない点を初期条件として与えると有限ステップでこの半直線上に移ることがわかる.

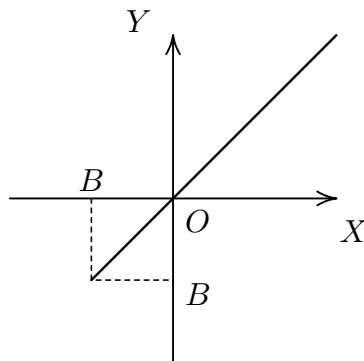


図5 $B < 0 < D$ における (9) の平衡点

以上から, (9) の解の挙動は元の微分方程式 (1) と同様に任意の初期条件に対して平衡解に収束するという結果が得られた. ただし, 1. および 2. の場合は, $D < 0$ および $\delta = e^{D/\varepsilon}$ であることと超離散化による極限 $\varepsilon \rightarrow +0$ から, 元の (3) に対して $\delta \rightarrow 0$ の極限を施した差分方程式系:

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n \\ y_{n+1} = y_n \end{cases}$$

と近い解の挙動を示していると考えられる. 一方, 3., 4. および 5. の場合が元の微分方程式の解の挙動を示したものとなっていると考えられる.

4 最後に

本論文ではネガティブフィードバックモデル (1) に対して, [3] で提案した手法を用いてその解構造を保存した離散化を行い, さらに超離散化して得られた差分方程式 (9) の解構造について調べた. その結果, 超離散化で得られた差分方程式 (9) に対して元の常微分方程式系 (1) の解構造と同じものとなることがわかった. この結果は, [4] でも予想していたように, 微分方程式の解構造を保存した超離散化を行うためには, 離散化を行う際に元の微分方程式の解構造を保存していることが重要となることを示唆していると著者は考えている. また, 著者はこれまでの研究で今回の離散化の手法も用いて反応拡散系の離散化および超離散化を行っている [5]. この超離散化で得られた差分方程式系において離散化による差分刻みに対応するパラメータを無限大にする極限を施していた. この操作を行うことでも超離散化で得られる方程式の解構造が元の微分方程式の解構造に近づいているようであると著者は予想しており, 今回得られた結果はこの予想を肯定するものとなると考えられ, 今後新たな進展があれば次の論文にまとめたい.

参考文献

- [1] J. S. Griffith, Mathematics of cellular control processes I. Negative feedback to one gene, *J. Theor. Biol.* 20(1968), 202–208.
- [2] S. Gibo and H. Ito, Discrete and ultradiscrete models for biological rhythms comprising a simple negative feedback loop, *J. Theor. Biol.* 378(2015), 89–95.
- [3] 松家 敬介, 常微分方程式の平衡解の安定性を保存した離散化について, 武蔵野大学数理工学センター紀要, **8** (2023), 54–58.
- [4] 松家 敬介, 超臨界ピッチフォーク分岐を起こす微分方程式の離散化および超離散化, 武蔵野大学数理工学センター紀要, **9** (2024), 147–155
- [5] K. Matsuya and M. Murata, Spatial pattern of discrete and ultradiscrete Gray-Scott model, *Discrete Continuous Dyn. Syst. Ser. B*, **20** (2015), 173–187.

(原稿提出: 2025 年 3 月 31 日; 修正稿提出: 2025 年 5 月 12 日)