

## 超臨界ピッチフォーク分岐を起こす微分方程式の離散化および超離散化

メタデータ	言語: Japanese 出版者: 武蔵野大学数理工学センター 公開日: 2024-10-09 キーワード: 作成者: 松家, 敬介 メールアドレス: 所属:
URL	<a href="https://mu.repo.nii.ac.jp/records/2000411">https://mu.repo.nii.ac.jp/records/2000411</a>

# 超臨界ピッチフォーク分岐を起こす微分方程式の離散化および超離散化

## Discretization and Ultradiscretization of the difference equation with supercritical pitchfork bifurcation

松家 敬介<sup>1</sup>

Keisuke Matsuya

### 概要

本論文では超臨界ピッチフォーク分岐を起こす常微分方程式に対して、平衡解の安定性を保存した離散化を行い、さらに超離散化して得られた差分方程式の解構造について調べた。その結果、超離散化で得られた差分方程式に対して差分刻みに対応するパラメータを無限大にする極限を施すと元の常微分方程式の解構造と同じものとなることがわかった。

## 1 はじめに

超離散化とは差分方程式に対して変数変換を施した後に極限を取ることで新たな差分方程式を得る操作のことである。超離散化で得られた差分方程式はまるめ誤差を考慮する必要がなく、数値計算に適している。さらに、方程式の解として箱玉系 [1, 2] を代表とするセルオートマトンが得られることもある。セルオートマトンとは有限の状態をとる離散力学系のことである。箱玉系はソリトン方程式に代表される可積分系の方程式と超離散化によって対応付けられること [1] が知られている。

超離散化は以下の極限が重要な役割を担う。

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \varepsilon \log \left( \exp \frac{A}{\varepsilon} + \exp \frac{B}{\varepsilon} \right) = \max [A, B]$$
$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \varepsilon \log \left( \exp \frac{A}{\varepsilon} \exp \frac{B}{\varepsilon} \right) = A + B$$

ただし、 $A, B \in \mathbb{R}$  とする。超離散化の具体的な例として、拡散方程式:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (1)$$

の超離散化を行う。ただし、 $u = u(t, x)$ ,  $t \geq 0$ ,  $x \in \mathbb{R}$  とする。(1) の離散化して得られる偏差分方程式は

$$u_{n+1}^j = \frac{u_n^{j+1} + u_n^{j-1}}{2} \quad (2)$$

等がある。ただし、 $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ ,  $j \in \mathbb{Z}$  とする。

<sup>1</sup> 武蔵野大学数理工学センター員 / 武蔵野大学工学部数理工学科准教授

(2) において,  $u_n^s$  に対して変数変換:

$$u_n^j = e^{U_n^j/\varepsilon} \quad (\varepsilon > 0)$$

を施す. その後に両辺の自然対数を取り,  $\varepsilon$  倍すると,

$$\varepsilon \log e^{U_{n+1}^j/\varepsilon} = \varepsilon \log \frac{e^{U_n^{j+1}/\varepsilon} + e^{U_n^{j-1}/\varepsilon}}{2}$$

が得られる. そこで両辺に対して, 極限  $\varepsilon \rightarrow +0$  をとると,

$$U_{n+1}^j = \max [U_n^{j+1}, U_n^{j-1}] \tag{3}$$

が得られ, これが熱方程式の超離散化である. (3) の初期条件に対して,  $U_0^j \in \{0, 1\}$  ( $\forall j$ ) を課すと,  $U_n^j \in \{0, 1\}$  ( $n \geq 0, \forall j$ ) となる. これは, (3) の解はセルオートマトンを与えることを示しており, その一例を下図に示す.

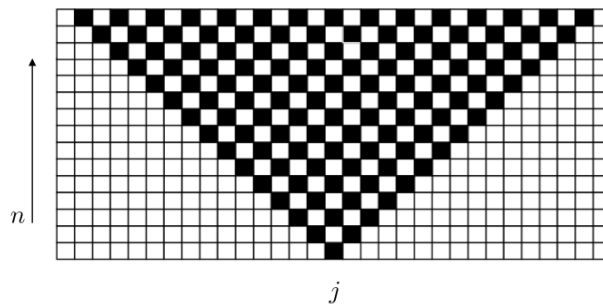


図1 (3) の解の例

□ : 0, ■ : 1

この解は, 一か所のみ 1 を与え残りを 0 とした初期条件を与えて 1 になるサイトが広がっている現象を確認でき, (3) でも拡散現象が確認できることがわかる.

超離散化は差分方程式に対して変数変換と極限をとっているが, 元の差分方程式の加法を max に, 乗法を加法に, 除法を減法に置き換えたものになっていることに注意する. ただ, 元の差分方程式に減法があると超離散化での極限がとれないことがある. これは, 極限:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \varepsilon \log \left( \exp \frac{A}{\varepsilon} - \exp \frac{B}{\varepsilon} \right)$$

が必ずしも存在しないことに起因している. この問題を解消するために微分方程式を離散化し超離散化するには, 離散化の際に減法が入らないように工夫する必要がある. 著者は微分方程式の解の構造を保存した離散化および超離散化の構成に興味があり, 非負値解をもつ微分方程式に対して, 減法が入らないような離散化であって元の方程式の平衡解の安定性も保存したものの [3] も提案している.

超臨界ピッチフォーク分岐とは, 分岐現象の一つで微分方程式もしくは差分方程式の平衡解が方程式に含まれるパラメータに応じて変化するものであり, 例えば, 次の常微分方程式:

$$\frac{dx}{dt} = 3cx(x-1) - x^3 + 1 \tag{4}$$

などに起きる現象である. ただし,  $x = x(t)$ ,  $c > 0$  とする. 実際に (4) には  $0 < c \leq 1$  のとき 1 つの安定な平衡解  $x \equiv 1$  があり,  $c > 1$  のとき 2 つの安定な平衡解  $x \equiv \frac{3c-1 \pm \sqrt{3(c-1)(3c+1)}}{2}$  と 1 つの不安定な平衡解  $x \equiv 1$  がある. この様子を可視化すると,

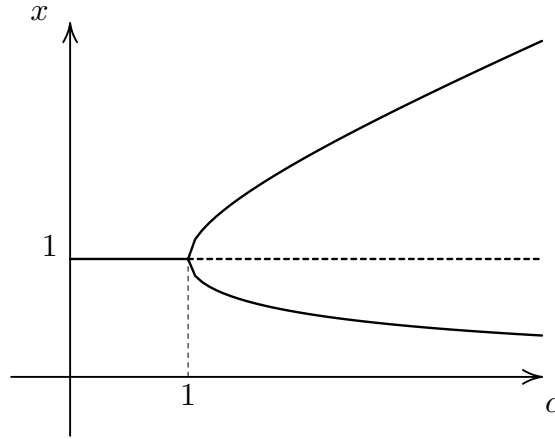


図2 (4) の分岐図

となる. これは横軸にパラメータ  $c$ , 縦軸に (4) の平衡解  $x$  をとったもので分岐図と呼ばれる. 実線部分が安定な平衡解, 破線が不安定な平衡解に対応している.

大森ら [4] は, (4) の離散化および超離散化を提案し, それらの解の挙動について解析を行っている. そこで提案されている離散化して得られた差分方程式は,

$$x_{n+1} = \frac{x_n + \delta \{3c(x_n)^2 + 1\}}{1 + \delta \{(x_n)^2 + 3c\}} \quad (5)$$

である. ただし,  $\delta > 0$  である. (5) は

$$\frac{x_{n+1} - x_n}{\delta} = 3c(x_n)^2 + 1 - x_{n+1} \{(x_n)^2 + 3c\}$$

と変形でき, 十分に滑らかな関数  $x(t)$  が存在し,  $x_n = x(t)$ ,  $x_{n+1} = x(t + \delta)$  となるとし, 極限  $\delta \rightarrow 0$  をとることで (4) が得られる. さらに, (5) に対して変数変換  $x_n = e^{X_n/\varepsilon}$ ,  $c = e^{C/\varepsilon}$ ,  $\delta = e^{D/\varepsilon}$  を施し, 両辺の自然対数を取り,  $\varepsilon$  倍して極限  $\varepsilon \rightarrow +0$  をとることで

$$X_{n+1} = \max [X_n, D + \max [2X_n + C, 0]] - \max [0, D + \max [2X_n, C]]$$

が得られる. [4] ではさらに極限  $D \rightarrow +\infty$  をとった方程式:

$$X_{n+1} = \max [2X_n + C, 0] - \max [2X_n, C] \quad (6)$$

の解の挙動について調べられている. パラメータ  $C$  の値に応じて解の挙動が変化し, 実際に図 3, 図 4, 図 5 のようになる. 図 3, 図 4, 図 5 は, 横軸を  $X_n$ , 縦軸を  $X_{n+1}$  とし, (6) を実線で描いたものである.

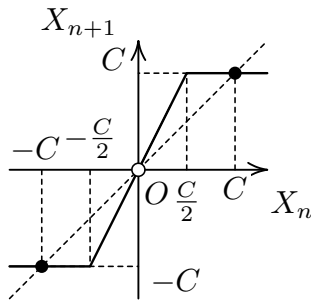


図3  $C > 0$

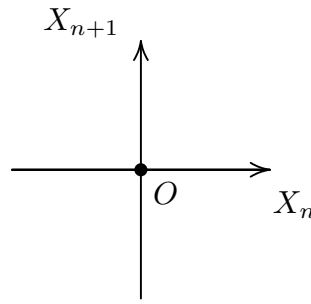


図4  $C = 0$

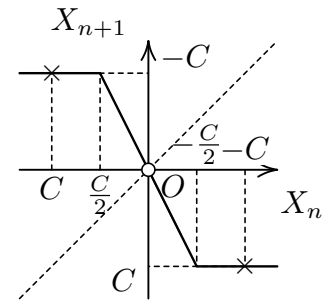


図5  $C < 0$

$C > 0$  の場合, 例えば初期値を  $X_0 = \frac{C}{3}$  とすると, 図3から(6)の解の挙動が以下の様にしてわかる.

- (i) 点  $(\frac{C}{3}, 0)$  を通り横軸に垂直な直線を引く.
- (ii) (i) で引いた直線と実線  $X_{n+1} = C - X_n$  の交点  $(\frac{C}{3}, \frac{2}{3}C)$  を通り横軸に平行な直線を引く.
- (iii) (ii) で引いた直線と点線  $X_{n+1} = X_n$  の交点  $(\frac{2}{3}C, \frac{2}{3}C)$  を通り横軸に垂直な直線を引く.
- (iv) (iii) で引いた直線と実線  $X_{n+1} = C - X_n$  の交点  $(\frac{2}{3}C, C)$  を通り横軸に平行な直線を引く.
- (v) (iv) で引いた直線と点線  $X_{n+1} = X_n$  の交点は  $(C, C)$  となる.
- (vi) (v) の結果から(6)の解  $X_n$  は  $\lim_{n \rightarrow \infty} X_n = C$  となる.

様々な初期値から同様の操作を行うことで, 図3からは(6)の解  $X_n$  は十分大きな  $n$  に対して,  $X_0 > 0$  であれば恒等的に  $C$  に,  $X_0 < 0$  であれば恒等的に  $-C$  になり,  $X_0 = 0$  であれば  $X_n \equiv 0$  となることがわかる. 図4からは(6)の解  $X_n$  は  $X_n \equiv 0$  ( $n \geq 1$ ) となることがわかる. 図5からは(6)の解  $X_n$  は  $X_0 \neq 0$  であれば十分大きな  $n$  に対して  $C$  と  $-C$  という2種類の値を交互にとることがわかる.(6)の  $C$  は(4)および(5)の  $c$  に対応する.  $C > (=)0$  は  $c > (=)1$  に対応し,(6)の解の挙動は(4)および(5)の解のそれと類似したものとなっている. その一方で,  $C < 0$  は  $c < 1$  に対応するが(6)の解には周期解が生じており,(4)の解の挙動とは異なるものとなっている. 本論文では(4)の解の挙動を保存した超離散化が得られたのでこれを報告する.

本論文では元の微分方程式(4)の解の挙動と同じくする離散化および超離散化の構築を行ったのでその結果を説明する. 特に離散化では[3]で提案した手法に則っている. 本論文の構成は第2節で平衡解の安定性を保存した離散化を紹介し, その平衡解の安定性についてまとめる. 第3節では第2節で得られた差分方程式の超離散化を行い, その解の挙動について議論し, 第4節では結果をまとめ今後の展望を述べる.

## 2 平衡解の安定性を保存した離散化

平衡解の安定性を保存した (4) の離散化を構築するために非負値関数  $h(x)$  を用いて, (4) を

$$\frac{dx}{dt} = \{3cx^2 + 1 + xh(x)\} - x \{x^2 + 3c + h(x)\}$$

と変形しておく. これより, 以下のような差分方程式:

$$\frac{x_{n+1} - x_n}{\delta} = \{3c(x_n)^2 + 1 + x_n h(x_n)\} - x_{n+1} \{(x_n)^2 + 3c + h(x_n)\}$$

は, 滑らかな関数  $x(t)$  を用いて,  $x_n = x(\delta n)$  とし極限  $\delta \rightarrow 0$  をとることで (4) が得られるので, (4) の離散化になっていることがわかる. この方程式を変形することで,

$$x_{n+1} = \frac{x_n + \delta \{3c(x_n)^2 + 1 + x_n h(x_n)\}}{1 + \delta \{(x_n)^2 + 3c + h(x_n)\}}$$

が得られる. この方程式の平衡解は (4) のそれと同じものがあり, その平衡解を  $x_n \equiv x^*$  とし, この平衡解のまわりで線形化すると,

$$\xi_{n+1} = \frac{1 + \delta \{6cx^* + h^* - 2(x^*)^2\}}{1 + \delta \{(x^*)^2 + 3c + h^*\}} \xi_n$$

が得られる. ただし,  $h^* = h(x^*)$ ,  $h_x^* = \frac{dh}{dx}(x^*)$  とする. この結果より, 平衡解  $x_n \equiv x^*$  が安定となる条件は,

$$\frac{1 + \delta \{6cx^* + h^* - 2(x^*)^2\}}{1 + \delta \{(x^*)^2 + 3c + h^*\}} < 1 \quad (7)$$

$$\frac{1 + \delta \{6cx^* + h^* - 2(x^*)^2\}}{1 + \delta \{(x^*)^2 + 3c + h^*\}} > -1 \quad (8)$$

となる. (7) は元の微分方程式の平衡解が安定となる条件に対応しており, (8) は離散化によって生じた離散系特有の条件となっている.  $x^* \geq 0$  であることに注意し, (8) が自明に満たされるように  $h(x)$  を選ぶと元の微分方程式平衡解の安定性の構造が保存されることとなる. 例えば,  $h(x) = x$  とすればよいことがわかる. そこで, 本論文では,  $h(x) = x$  とした

$$x_{n+1} = \frac{x_n + \delta \{(3c + 1)(x_n)^2 + 1\}}{1 + \delta \{(x_n)^2 + x_n + 3c\}} \quad (9)$$

を (4) の離散化として議論する.

### 3 超離散化で得られた方程式とその解の挙動

本節では前節で得られた (4) の離散化である (9) の超離散化とその解の挙動について議論する. (9) に対して,  $x_n = e^{X_n/\varepsilon}$ ,  $\delta = e^{D/\varepsilon}$ ,  $c = e^{C/\varepsilon}$  とし, 超離散化を行うと

$$X_{n+1} = \max [X_n, D + \max [\max [C, 0] + 2X_n, 0]] - \max [0, D + \max [2X_n, X_n, C]] \quad (10)$$

が得られる. (10) の解の挙動は, 方程式に含まれるパラメータ  $C, D$  の値によって変化する. 実際に, 以下の 7 通りに場合分け出来る. 図 6 は  $(C, D)$  平面上で 7 通りの場合を可視化したものである. それぞれの場合における (10) の解の挙動は次の通りとなる.

1.  $C, D \geq 0$
2.  $-D \leq C \leq 0$
3.  $0 \leq D \leq -C$
4.  $C \leq 0, D \leq 0$
5.  $0 \leq C \leq -\frac{D}{2}$
6.  $-2C \leq D \leq -C$
7.  $-C \leq D \leq 0$

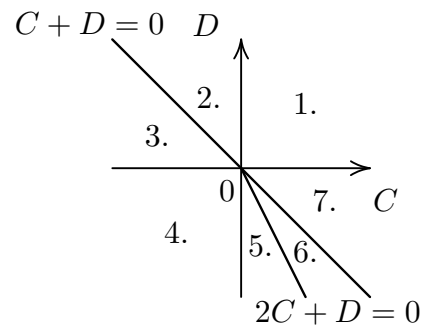


図 6 (10) の解の挙動の場合分け

1.  $C, D \geq 0$

この場合, (10) は

$$X_{n+1} = \begin{cases} -C & \left( X_n \leq -\frac{C}{2} \right) \\ 2X_n & \left( -\frac{C}{2} \leq X_n \leq \frac{C}{2} \right) \\ C & \left( X_n \geq \frac{C}{2} \right) \end{cases}$$

と変形できる. この場合, (10) の解  $X_n$  は十分大きな  $n$  に対して,  $X_0 > 0$  であれば恒等的に  $C$  に,  $X_0 < 0$  であれば恒等的に  $-C$  になり,  $X_0 = 0$  であれば  $X_n \equiv 0$  となることがわかる.

2.  $-D \leq C \leq 0$

この場合, (10) は

$$X_{n+1} = \begin{cases} -C & (X_n \leq C) \\ -X_n & (C \leq X_n \leq 0) \\ 0 & (X_n \geq 0) \end{cases}$$

と変形できる. この場合, (10) の解  $X_n$  は  $X_0 < 0$  であれば  $X_n \equiv 0$  ( $n \geq 2$ ),  $X_0 > 0$  であれば  $X_n \equiv 0$  ( $n \geq 1$ ) となることがわかる.

3.  $0 \leq D \leq -C$

この場合, (10) は

$$X_{n+1} = \begin{cases} D & (X_n \leq -D) \\ -X_n & (-D \leq X_n \leq 0) \\ 0 & (X_n \geq 0) \end{cases}$$

と変形できる. この場合, (10) の解  $X_n$  は  $X_0 < 0$  であれば  $X_n \equiv 0$  ( $n \geq 2$ ),  $X_0 > 0$  であれば  $X_n \equiv 0$  ( $n \geq 1$ ) となることがわかる.

4.  $C \leq 0, D \leq 0$

この場合, (10) は

$$X_{n+1} = \begin{cases} D & (X_n \leq D) \\ X_n & \left(D \leq X_n \leq -\frac{D}{2}\right) \\ -X_n - D & \left(-\frac{D}{2} \leq X_n \leq -D\right) \\ 0 & (X_n \geq -D) \end{cases}$$

と変形できる. この場合, (10) の解  $X_n$  は  $X_0 \leq D$  であれば  $X_n \equiv D$  ( $n \geq 1$ ),  $X_0 \in \left[D, -\frac{D}{2}\right]$  であれば  $X_n \equiv X_0$ ,  $X_0 \in \left(-\frac{D}{2}, -D\right]$  であれば  $X_n \equiv -X_0 - D$  ( $n \geq 1$ ),  $X_0 \geq -D$  であれば  $X_n \equiv 0$  ( $n \geq 1$ ) となることがわかる.

5.  $0 < C \leq -\frac{D}{2}$

この場合, (10) は

$$X_{n+1} = \begin{cases} D & (X_n \leq D) \\ X_n & \left(D \leq X_n \leq -\frac{D}{2}\right) \\ -X_n - D & \left(-\frac{D}{2} \leq X_n \leq -D - C\right) \\ C & (X_n \geq -D - C) \end{cases}$$

と変形できる. この場合, (10) の解  $X_n$  は  $X_0 \leq D$  であれば  $X_n \equiv D$  ( $n \geq 1$ ),  $X_0 \in \left[D, -\frac{D}{2}\right]$  であれば  $X_n \equiv X_0$ ,  $X_0 \in \left(-\frac{D}{2}, -D - C\right]$  であれば  $X_n \equiv -X_0 - D$  ( $n \geq 1$ ),  $X_0 \geq -D - C$  であれば  $X_n \equiv C$  ( $n \geq 1$ ) となることがわかる.

6.  $-2C \leq D \leq -C$

この場合, (10) は

$$X_{n+1} = \begin{cases} D & (X_n \leq D) \\ X_n & (D \leq X_n \leq -C - D) \\ 2X_n + C + D & \left(-C - D \leq X_n \leq -\frac{D}{2}\right) \\ C & \left(X_n \geq -\frac{D}{2}\right) \end{cases}$$

と変形できる. この場合, (10) の解  $X_n$  は  $X_0 \leq D$  であれば  $X_n \equiv D$  ( $n \geq 1$ ),  $X_0 \in [D, -C - D]$  であれば  $X_n \equiv X_0$ ,  $X_0 > -C - D$  であれば十分大きな  $n$  に対して恒等的に  $C$  になることがわかる.

7.  $-C \leq D \leq 0$

この場合, (10) は

$$X_{n+1} = \begin{cases} -C & (X_n \leq -C) \\ X_n - C - D & (D \leq X_n \leq -C - D) \\ 2X_n & \left(-C - D \leq X_n \leq \frac{C}{2}\right) \\ C & \left(X_n \geq \frac{C}{2}\right) \end{cases}$$

と変形できる. この場合, (10) の解  $X_n$  は十分大きな  $n$  に対して,  $X_0 > 0$  であれば恒等的に  $C$  に,  $X_0 < 0$  であれば恒等的に  $-C$  になり,  $X_0 = 0$  であれば  $X_n \equiv 0$  となることがわかる.

(10) に対して極限  $D \rightarrow +\infty$  をとることで,

$$X_{n+1} = \max[\max[C, 0] + 2X_n, 0] - \max[2X_n, X_n, C]$$

が得られ, この方程式の解には (10) の解の 1. および 2. に対応するものがある.  $D > 0$  の場合, (10) では 1., 2. および 3. の 3 種類の場合があったが, 極限  $D \rightarrow +\infty$  をとることで 3. に対応する条件  $0 < D < -C$  を満たさなくなっているために 1. および 2. の 2 種類の場合のみとなっている. この結果は,  $C > 0$  であれば 2 つの安定な平衡解  $X_n \equiv \pm C$  と 1 つの不安定な平衡解  $X_n \equiv 0$  があり,  $C \leq 0$  であれば 1 つの安定な平衡解  $X_n \equiv 0$  があるという解構造になっており, もとの微分方程式 (4) の解構造と同じものとなっている.

## 4 最後に

本論文では超臨界ピッチフォーク分岐を起こす常微分方程式 (4) に対して, [3] で提案した手法を用いてその解構造を保存した離散化を行い, さらに超離散化して得られた差分方程式 (10) の解構造について調べた. その結果, 超離散化で得られた差分方程式 (10) に対して差分刻みに対応するパラメータ  $D$  を無限大にする極限を施すと元の常微分方程式 (4) の解構造と同じものとなることがわかった. この結果から微分方程式の解構造を保存した超離散化を行うためには, 離散化を行う際に元の微分方程式の解構造を保存していることが重要となることが予想される. この予想を確認するためには超離散化を施す際の  $\varepsilon$  に対する極限操作を行わずに  $\varepsilon$  の変化に伴う解の構造の変化を確認することが必要になると考えられ, これは今後の課題としたい. 著者はこれまでの研究で今回の離散化の手法も用いて反応拡散系の離散化および超離散化を行っている [5]. この超離散化で得られた差分方程式や [4] において離散化による差分刻みに対応するパラメータを無限大にする極限を施していた. この操作を行うことでも超離散化で得ら

れる方程式の解構造が元の微分方程式の解構造に近づいているようであると著者は予想しており, 先に挙げた今後の課題はこの予想に対して何かしらの結論が得られることも期待され, 進展があれば次の論文にまとめたい.

## 参考文献

- [1] T. Tokihiro, D. Takahashi, J. Matsukidaira, and J. Satsuma, From soliton equations to integrable cellular automata through a limiting procedure, *Phys. Rev. Lett.* **76** (1996), 3247–3250.
- [2] D. Takahashi and J. Matsukidaira, Box and ball system with a carrier and ultradiscrete modified KdV equation, *J. Phys. A*, **30** (1997), L733.
- [3] 松家 敬介, 常微分方程式の平衡解の安定性を保存した離散化について, 武蔵野大学数理工学センター紀要, **8** (2023), 54–58.
- [4] Shousuke Ohmori and Yoshihiro Yamazaki, On dynamical connection between continuous and tropical discretized dynamical systems in one-dimensional, *RIMS Kôkyûroku Bessatsu*, **B94** (2023), 55–63.
- [5] K. Matsuya and M. Murata, Spatial pattern of discrete and ultradiscrete Gray-Scott model, *Discrete Continuous Dyn. Syst. Ser. B*, **20** (2015), 173–187.

(原稿提出: 2024 年 3 月 20 日; 修正稿提出: 2024 年 4 月 12 日)