Discretization of ordinary defferential equation preserving stabilities of the equilibrium solutions

常微分方程式の平衡解の安定性を保存した離散化について

Discretization of ordinary defferential equation preserving stabilities of the equilibrium solutions

松 家 敬 介[1]

Keisuke Matsuya

概要

著者は, これまでの研究で, 常微分方程式系の離散化で得られた差分方程式それぞれの平衡解とその安定性について比較し, 差分刻みを十分小さくすることで離散化で得られた差分方程式系の平衡解の安定性に関する条件が元の常微分方程式系のそれに近づくことが分かっている．この結果から差分刻みの大きさによって, それぞれの平衡解の安定性にずれが生じることもわかっている．本稿ではこれまでの研究で提案していた離散化を修正し, 差分刻みによって平衡解の安定性が元の微分方程式のそれと変化しないものを提案する．

1 はじめに

本稿では以下の常微分方程式:

$$\frac{du}{dt} = f(u) - ug(u) \tag{1}$$

および, 常微分方程式系:

$$\begin{cases} \dfrac{dv}{dt} = f_1(v,w) - vg_1(v,w) \\ \dfrac{dw}{dt} = f_2(v,w) - wg_2(v,w) \end{cases} \tag{2}$$

について考察する．ただし, $u = u(t),\ v = v(t),\ w = w(t)\ (t \geq 0)$ とし, $f(u),\ g(u),\ f_j(u,v),\ g_j(u,v)\ (j = 1,2)$ はそれぞれ非負係数の多項式とする．著者は, これまでの研究で常微分方程式を離散化して得られる差分方程式とその平衡解の安定性について調べていた [1].

[2] で挙げられている手法による (1) および (2) の離散化は以下のような差分方程式 (3) および差分方程式系 (4) である．

$$u_{n+1} = \frac{u_n + \delta f(u_n)}{1 + \delta g(u_n)} \tag{3}$$

$$\begin{cases} v_{n+1} = \dfrac{v_n + \delta f_1(v_n, w_{n+1})}{1 + \delta g_1(v_n, w_{n+1})} \\ w_{n+1} = \dfrac{w_n + \delta f_2(v_n, w_n)}{1 + \delta g_2(v_n, w_n)} \end{cases} \tag{4}$$

ただし, $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0},\ \delta > 0$ とする．(1) および (3), (2) および (4) はそれぞれ同じ平衡解をもち, それぞれの安定性についてここでまとめておく．

---

[1] 武蔵野大学数理工学センター員 / 武蔵野大学工学部数理工学科准教授

(1) の平衡解 $u \equiv u^* \left(f\left(u^*\right) - u^* g\left(u^*\right) = 0\right)$ は,

$$f_u^* - g^* - u^* g_u^* < 0 \tag{5}$$

のとき漸近安定となる．ただし, $'$ で u による微分を表すとし, $f_u^* = f'\left(u^*\right)$, $g^* = g\left(u^*\right)$, $g_u^* = g'\left(u^*\right)$ とする．また, (3) の平衡解 $u_n \equiv u^*$ は,

$$\frac{1 + \delta\left(f_u^* - u^* g_u^*\right)}{1 + \delta g^*} < 1 \tag{6}$$

$$\frac{1 + \delta\left(f_u^* - u^* g_u^*\right)}{1 + \delta g^*} > -1 \tag{7}$$

のとき漸近安定となる．(6) は (5) に対応した条件となっている．その一方で, (7) によって, (1) の平衡解 $u \equiv u^*$ は漸近安定であっても (3) の平衡解 $u_n \equiv u^*$ は不安定となることがある．

(2) の平衡解 $(v, w) \equiv \left(v^*, w^*\right) \left(f_1\left(v^*, w^*\right) - v^* g_1\left(v^*, w^*\right) = 0,\ f_2\left(v^*, w^*\right) - w^* g_1\left(v^*, w^*\right) = 0\right)$ は,

$$A = \begin{pmatrix} f_{1,v}^* - g_1^* - v^* g_{1,v}^* & f_{1,w}^* - v^* g_{1,w}^* \\ f_{2,v}^* - w^* g_{2,v}^* & f_{2,w}^* - g_2^* - w^* g_{2,w}^* \end{pmatrix}$$

とし,

$$\det A > 0 \tag{8}$$

$$\mathrm{tr} A < 0 \tag{9}$$

のとき漸近安定となる． ただし, $f_{1,v}^* = \partial_v f_1\left(v^*, w^*\right)$, $f_{1,w}^* = \partial_w f_1\left(v^*, w^*\right)$, $f_{2,v}^* = \partial_v f_2\left(v^*, w^*\right)$, $f_{2,w}^* = \partial_w f_2\left(v^*, w^*\right)$, $g_{1,v}^* = \partial_v g_1\left(v^*, w^*\right)$, $g_{1,w}^* = \partial_w g_1\left(v^*, w^*\right)$, $g_{2,v}^* = \partial_v g_2\left(v^*, w^*\right)$, $g_{2,w}^* = \partial_w g_2\left(v^*, w^*\right)$, $g_1^* = g_1\left(v^*, w^*\right)$, $g_2^* = g_2\left(v^*, w^*\right)$ とする．

また, (4) の平衡解 $\left(v_n, w_n\right) \equiv \left(v^*, w^*\right)$ は,

$$\tilde{B} = \begin{pmatrix} \tilde{B}_{11} & \tilde{B}_{12} \\ \tilde{B}_{21} & \tilde{B}_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{1 + \delta\left(f_{1,v}^* - v^* g_{1,v}^*\right)}{1 + \delta g_1^*} & \dfrac{\delta\left(f_{1,w}^* - v^* g_{1,w}^*\right)}{1 + \delta g_1^*} \\ \dfrac{\delta\left(f_{2,v}^* - w^* g_{2,v}^*\right)}{1 + \delta g_2^*} & \dfrac{1 + \delta\left(f_{2,w}^* - w^* g_{2,w}^*\right)}{1 + \delta g_2^*} \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} \tilde{B}_{11} + \tilde{B}_{12}\tilde{B}_{21} & \tilde{B}_{12}\tilde{B}_{22} \\ \tilde{B}_{21} & \tilde{B}_{22} \end{pmatrix}$$

とし,

$$\det B < 1 \tag{10}$$

$$1 - \mathrm{tr} B + \det B > 0 \tag{11}$$

$$1 + \mathrm{tr} B + \det B > 0 \tag{12}$$

のとき漸近安定となる．(10) は (8) に, (11) は (9) に対応した条件となっている．その一方で, (12) によって, (2) の平衡解 $\left(v_n, w_n\right) \equiv \left(v^*, w^*\right)$ は漸近安定であっても (4) の平衡解 $\left(v_n, w_n\right) \equiv \left(v^*, w^*\right)$ は不安定となることがある．本稿で提案する離散化は (7) と (12) の条件を解決するものであって, 減算のない離散化となっている．

減算のない離散化を考える理由は, 著者は微分方程式の解の性質を保存した離散化および超離散化 [3, 4] に興味をもっているからである. 超離散化とは, 有理式の形をした差分方程式に対して極限操作を行うことで新たな差分方程式を得る手法のことである. 超離散化で得られた差分方程式はまるめ誤差を考える必要がなく, 数値計算に適している. さらに, 方程式の解として箱玉系 [3, 5] を代表とするセルオートマトンが得られることもある. セルオートマトンとは有限の状態をとる離散力学系のことである. 箱玉系はソリトン方程式に代表される可積分系の方程式と超離散化によってつながっている. 筆者は離散化だけでなく超離散化であって可積分系の方程式とは限らない微分方程式の解の性質を保持するものを探すことにも興味をもっている. ただ, 差分方程式に減算があると極限をとることができないために超離散化を行うことができない [4]. 今回得られた離散化はこの問題を解消したものとなっている.

本稿の構成は, 第 2 節で (1) の離散化を与え, その平衡解の安定性について議論する. 第 3 節では (2) の離散化とその平衡解の安定性について議論する. 最後に, 第 4 節では本稿の結論と今後の課題を示す.

2　(1) の離散化について

本節では (1) の離散化であって平衡解の安定性も保存したものを提案する. (1) を

$$\frac{du}{dt} = \{f(u) + uh(u)\} - u\{g(u) + h(u)\}$$

と変形しておく. ただし, $h(u)$ は非負係数の多項式とする. この形から [2] の手法を用いて (1) を離散化すると,

$$u_{n+1} = \frac{u_n + \delta\left\{f\left(u_n\right) + u_n h\left(u_n\right)\right\}}{1 + \delta\left\{g\left(u_n\right) + h\left(u_n\right)\right\}} \tag{13}$$

が得られる. (13) は (1) および (3) と同じ平衡解 $u_n \equiv u^*$ をもっている. (13) の平衡解の安定性を解析すると平衡解が漸近安定となる条件は (6) と同値なものが得られ, (7) は $h(u)$ によって異なる条件が得られる. 実際に, $h^* = h\left(u^*\right)$ とし,

$$\begin{aligned} \frac{1 + \delta\left(f_u^* + h^* - u^* g_u^*\right)}{1 + \delta\left(g^* + h^*\right)} &> -1 \\ 2 + \delta\left(f^* + g^* + 2h^* - u^* g_u^*\right) &> 0 \end{aligned}$$

となる. この条件が自動的に満足されるように $h(u)$ を選択すると平衡解の安定性を保存した離散化が出来たことになる. 例えば, $f(u)$, $g(u)$, $h(u)$ が非負係数の多項式であることに注意すると,

$$h(u) = \frac{dg}{du}(u)$$

などとしておけば十分であることがわかる.

3　(2) の離散化について

本節では (2) の離散化であって平衡解の安定性も保存したものを提案する．基本的なアイディアは前節で用いたものと同じである．(2) を

$$\begin{cases} \dfrac{dv}{dt} = \{f_1(v,w) + vh_1(v,w)\} - v\{g_1(v,w) + h_1(v,w)\} \\ \dfrac{dw}{dt} = \{f_2(v,w) + wh_2(v,w)\} - w\{g_2(v,w) + h_2(v,w)\} \end{cases}$$

と変形しておく．ただし，$h_j(v,w)$ $(j=1,2)$ は非負係数の多項式とする．この形から [2] の手法を用いて (2) を離散化すると，

$$\begin{cases} v_{n+1} = \dfrac{v_n + \delta\{f_1(v_n, w_{n+1}) + v_n h_1(v_n, w_{n+1})\}}{1 + \delta\{g_1(v_n, w_{n+1}) + h_1(v_n, w_{n+1})\}} \\ w_{n+1} = \dfrac{w_n + \delta\{f_2(v_n, w_n) + w_n h_2(v_n, w_n)\}}{1 + \delta\{g_2(v_n, w_n) + h_2(v_n, w_n)\}} \end{cases} \tag{14}$$

が得られる．(14) は (2) および (4) と同じ平衡解 $(v_n, w_n) \equiv (v^*, w^*)$ をもっている．(14) の平衡解の安定性を解析すると，(4) に対する $\tilde{B}$ と類似したものを (14) に対して求めると，$h_j^* = h_j(v^*, w^*)$ $(j=1,2)$ とし，

$$\begin{pmatrix} \dfrac{1 + \delta\left(f_{1,v}^* + h_1^* - v^* g_{1,v}^*\right)}{1 + \delta(g_1^* + h_1^*)} & \dfrac{\delta\left(f_{1,w}^* - v^* g_{1,w}^*\right)}{1 + \delta(g_1^* + h_1^*)} \\ \dfrac{\delta\left(f_{2,v}^* - w^* g_{2,v}^*\right)}{1 + \delta(g_2^* + h_2^*)} & \dfrac{1 + \delta\left(f_{2,w}^* + h_2^* - w^* g_{2,w}^*\right)}{1 + \delta(g_2^* + h_2^*)} \end{pmatrix}$$

となる．平衡解が漸近安定となる条件は (10) および (11) と同値なものが得られ，(12) は $h_j(v,w)$ $(j=1,2)$ によって異なる条件が得られる．実際に，(12) に対応する条件を変形すると，

$$\begin{aligned} &\left\{2 + \delta\left(f_{1,v}^* + 2h_1^* + g_1^* - v^* g_{1,v}^*\right)\right\}\left\{2 + \delta\left(f_{2,w}^* + 2h_2^* + g_2^* - w^* g_{2,w}^*\right)\right\} \\ &\qquad\qquad + \delta^2\left(f_{1,w}^* - v^* g_{1,w}^*\right)\left(f_{2,v}^* - w^* g_{2,v}^*\right) > 0 \end{aligned}$$

となる．この条件が自動的に満足されるように $h_j(v,w)$ $(j=1,2)$ を選択すると平衡解の安定性を保存した離散化が出来たことになる．例えば，$f_j(v,w)$，$g_j(v,w)$，$h_j(v,w)$ が非負係数の多項式であることに注意すると，

$$\begin{aligned} h_1(v,w) &= \frac{\partial f_1}{\partial v}(u,v) + u\left\{\frac{\partial g_1}{\partial v}(u,v) + \frac{\partial g_1}{\partial w}(u,v)\right\} \\ h_2(v,w) &= \frac{\partial f_2}{\partial w}(u,v) + w\left\{\frac{\partial g_2}{\partial v}(u,v) + \frac{\partial g_2}{\partial w}(u,v)\right\} \end{aligned}$$

などとしておけば十分であることがわかる．

4　最後に

本稿では常微分方程式の離散化であって平衡解の安定性を差分刻みによらず元の微分方程式のそれを保存するものを与えた．今回の離散化で得られた差分方程式は減算を含まない形の離散化となっている．

今後は, 本稿で提案した離散化で具体的な方程式系の離散化および超離散化とそれぞれの解析を行いたい．特に微分方程式の離散化で得られる差分方程式は離散化の方法で様々なものが得られる．その中には平衡解の安定性が元の微分方程式と異なるものもあり, 今回提案した離散化によって得られた差分方程式も含めてそれぞれの超離散化の挙動の違いについても明らかにしていきたい．

参考文献

[1] 松家 敬介, 反応拡散系の減算のない離散化と平衡解の安定性について, 武蔵野大学数理工学センター紀要, **4** (2019), 50–58.

[2] Murray E. Alexander and Seyed M. Moghadas, $\mathcal{O}(\ell)$ shift in Hopf bifurcations for a class of non-standard numerical schemes *2004 Conference on Diff. Eqns. and Appl. in Math. Biology,* **Conference 12** (2005), 9–19.

[3] T. Tokihiro, D. Takahashi, J. Matsukidaira, and J. Satsuma, From soliton equations to integrable cellular automata through a limiting procedure *Phys. Rev. Lett.* **76** (1996), 3247–3250.

[4] 広田 良吾, 高橋 大輔, 『差分と超離散』共立出版, (2003)

[5] D. Takahashi and J. Matsukidaira, Box and ball system with a carrier and ultradiscrete modified KdV equation *J. Phys. A,* **30** (1997), L733.

(原稿提出: 2023 年 1 月 8 日; 修正稿提出: 2023 年 1 月 18 日)