Stability of slow-to-start CA traffic model

Slow-to-start CA 交通流モデルの安定性

Stability of slow-to-start CA traffic model

時 弘 哲 治[1]
Tetsuji Tokihiro

概要

Cellular Automaton （CA）を用いた交通流の数理モデルである Slow-to-Start CA では，車の密度が $\frac{1}{3}$ 以下の場合には，任意の初期状態に対して必ず自由走行定常状態に収束することを示す．

1　はじめに

交通流のセルオートマトン（CA）モデルとして最も基本的なものは，ルール 184ECA モデル（ECA184）である [1, 2, 3]．このモデルでは，道路を車の大きさに応じて適当な幅に区切りセルとみなす．各セルの状態は，車が存在するか存在しないかの 2 つの状態のみである．時間発展規則は，前のセルに車が存在すればそのセルに留まり，それでなければ次のセルに移動するという単純なものである．図 1 に時間発展の例を示す．車が存在する状態を 1，しない状

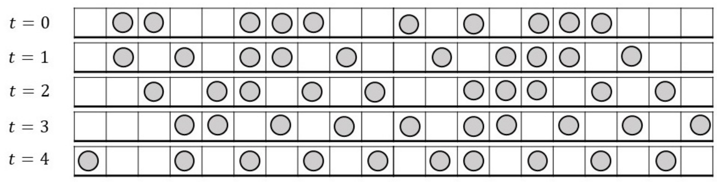

図 1　ECA184 交通流モデルの時間発展の例．車は前のセルが空いていたら次の時刻で進み，空いていなければ動かない．

態を 0 で表すと，ECA184 は 0,1 列の時間発展として表現できる 1 次元 2 値 3 近傍 CA であり，その時間発展の規則は

$$\frac{000}{0} \quad \frac{001}{0} \quad \frac{010}{0} \quad \frac{011}{1} \quad \frac{100}{1} \quad \frac{101}{1} \quad \frac{110}{0} \quad \frac{111}{1} \tag{1}$$

と表すことができる．

ECA184 では，車の密度が $\frac{1}{2}$ より小さい場合には自由走行相に，大きい場合には渋滞相に収束する．ただ，実際に観測されている交通流では，自由走行相と渋滞相の間に中間的な準安定相が存在することが知られており [4]，ECA184 ではこの準安定相を再現することはできない．こうした中間相の存在する CA モデルとして，slow-to-start CA モデル（STSCA）がある [5]．STSCA では，いったん停止した車はエンジンを切ってしまい，前が空いても動き始め

[1] 武蔵野大学数理工学センター員 / 武蔵野大学工学部数理工学科特任教授

るのに時間がかかるとしたものである．つまり，前のセルが空いても，1 時間ステップの間は止まったままであるとする．セルの状態としては，車がいない状態（0），エンジンを切った車がいる状態（1），エンジンのかかった車がいる状態（2）の 3 状態があることになる．図 2 に図 1 と同じ初期状態からの時間発展の例を示す．

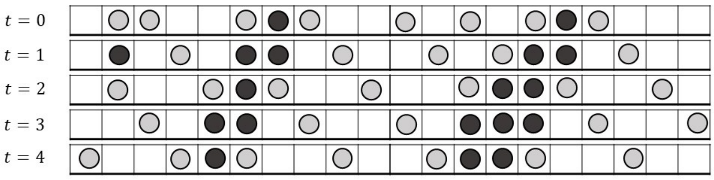

図 2　STSCA 交通流モデルの時間発展の例．車はエンジンを切った状態（黒い●，状態 1）とエンジンのかかった状態（灰色の○，状態 2）の 2 通りがある．前のセルが空いていたら灰色の○は次の時刻で進み，黒い●は次の時刻では動かず灰色の○に変わる．前のセルが空いていない場合，灰色の○は黒い●に変化し，黒い●は変化せず，どちらも動かない．

以上の議論からわかるように，STSCA は 3 値 3 近傍の CA とみなすことが可能であり，次の時間発展規則を満たす CA と同一視できる．

$$\begin{array}{ccccccccc} \frac{000}{0} & \frac{001}{0} & \frac{002}{0} & \frac{010}{2} & \frac{011}{1} & \frac{012}{1} & \frac{020}{0} & \frac{021}{1} & \frac{022}{1} \\ \frac{100}{\times 0} & \frac{101}{0} & \frac{102}{0} & \frac{110}{2} & \frac{111}{1} & \frac{112}{1} & \frac{120}{0} & \frac{121}{\times 1} & \frac{122}{\times 1} \\ \frac{200}{2} & \frac{201}{2} & \frac{202}{2} & \frac{210}{2} & \frac{211}{1} & \frac{212}{1} & \frac{220}{0} & \frac{221}{\times 1} & \frac{222}{\times 1} \end{array} \tag{2}$$

ここで $\times 1$ などは，時間発展の途中では現れず，初期配置でしかありえない状態からの時間変化を表す．例えば，100 は前に 2 つ空いたサイトがあるにもかかわらずエンジンを切った車（●）が存在する状態だが，前 2 つが空いているということは 1 時間ステップ前にはこの車の前は空いているので，STSCA の規則から，エンジンがかからない状態はあり得ない．同様に，121 はエンジンのかかった車（灰色の○）の前後にエンジンを切った車（●）が存在する状態であるが，STSCA の規則から，この 1 時間ステップ前には前後の車は既に存在しているため，真ん中の車がエンジンをかけた状態になることはありえない．その他も同様である．

STSCA の基本図は数値的に求められており，車の密度が $\frac{1}{3}$ 以下では自由走行相に収束することが観測されている [6]．筆者の調べた限りではこの事実を明確に証明した文献は見当たらなかったので，本稿でその初等的な証明を与えることにする．

2　自由走行状態への収束とその証明

セルの総数を N，車の総数を M とし，周期的な境界条件を課した STSCA を考えよう．自由走行状態とは，すべての車が次のステップで動く状態を指すものとする．このとき，次の定理が成立する．

定理 1　$M \leq \frac{1}{3}N$ であれば，任意の初期状態に対して，一定の時間の後に系は自由走行定常状態になる．

定理 1 を証明するために，いくつかの定義と補題を用意する．STSCA のある時刻での状態は，0, 1, 2 からなる要素数 N の有限数列で記述される．例えば，

$$20021200202020011112000000020000$$

のような数列である．周期的境界条件により，最後の数の「前」にあるのは最初の数である．状態（012 列）を記号 ϕ で表す．

定義 1　状態 ϕ を次の 4 通りの領域に分割する：

A_k　: k 個の”20” が並んだ（$\underbrace{2020\cdots20}_{k\text{ 個}}$）領域.

B_k　: k 個の”1” が並んだ（$\underbrace{11\cdots1}_{k\text{ 個}}$）領域.

B'_k　: $k-1$ 個の”1” が”2” の前に並んだ（$\underbrace{21\cdots1}_{k\text{ 個}}$）領域.（$B'_1$ は 2 の前に A_k が（20 が）存在する 1 つの要素からなる領域.）

C_k　: A, B, B' 領域を除いてできる”0” が k 個並んだ（$\underbrace{00\cdots0}_{k\text{ 個}}$）領域.

例 1　次の状態 ϕ は（周期境界条件に注意して）

$$00111200202020000211022020020 0 \rightarrow 00\|111\|20\|0\|202020\|000\|211\|0\|2\|2020\|0\|20\|0$$

のように分割され，$\phi = B_3A_1C_1A_3C_3B'_3C_1B'_1A_2C_1A_1C_3$ である．

注意 1　自由走行状態は領域 A_k と C_k のみから構成される．

次の命題は有限サイト数の CA 系に基本的な命題であり，STSCA が有限時間ステップ内に周期軌道に収束することを保証する．自明な事実として明示されずに使われることが多いが，ここでは念のために証明を述べておく．

命題 1　有限自由度の決定論的な力学系は，任意の初期状態に対して有限時間内に周期軌道に収束する．ただし，時間的に不変な状態も 1 周期軌道とみなす．

証明　系の時間ステップ t での状態を $\phi(t)$ とする．$t \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$，初期状態を $\phi(0)$ としても一般性を失わない．有限自由度であるので，系の取りうる状態の数も有限であり，その数を K とする．すると，$\{\phi(t)\}_{t=0}^{K}$ の中には少なくとも 2 つ同じ状態が存在する．これを $\phi(t_1)$，$\phi(t_1+T)$ $(T>0)$ とすると，決定論的力学的であるので，任意の $j \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対して $\phi(t_1+j) = \phi(t_1+j+T)$．よって，周期軌道に収束する．　□

次の補題は，20 が常に前方に 1 だけ進むことから明らかである．

補題 1　ある時刻での状態が A_k, C_k のみから構成されていれば，その時刻以降は，各時間ステップでその状態が 1 ずつ平行移動する自由走行状態になる．

命題 1 と補題 1 により，収束した周期軌道のすべての点（状態）で，領域 B_k および B'_k が存在しないことを示せば，定理 1 が示される．

補題 2　$M < \frac{1}{3}N$ であれば，任意の時刻において少なくともひとつは状態 C_k $(k \geq 2)$ が存在する．$M = \frac{1}{3}N$ のとき，C_k $(k \geq 2)$ が存在しないなら，その状態は A_1C_1 が繰り返す状態である．

証明　A_k に含まれるサイト数は $2k$ であり，k 台の車が含まれる．一方，B_k, B'_k に含まれるサイト数は k であり，k 台の車が含まれている．ゆえに $M < \frac{1}{3}N$ とすると，領域 A, B の数は高々 M であり，せいぜい $2M$ サイトしか A と B の領域が占めるサイトはなく，残りは領域 C であり，領域 C の占めるサイト数は $N - 2M > M$ である．仮に，領域 A, B の間に C_1 を入れていってもそれでは全サイト数が N に満たないので，少なくともひとつは C_k $(k \geq 2)$ が存在する．同様に考えて，$M = \frac{1}{3}N$ の場合には，すべて A_1 でその間に C_1 を入れる以外に $C_k (k \geq 2)$ が存在しない状態はない．□

補題 3　領域 C_k は次の時間ステップで C_k のまま 1 前にシフトするか C_{k-1} になる．($k = 1$ では消滅する．）また，新しく生じる C 領域は $k = 1$ である C_1 のみである．

証明　領域 C はその両隣の領域が，ACA, ACB, BCA, BCB の 4 通りのケースがある．（以下の議論は B を B' としても変わらない．）ACA では C の領域の大きさは変化せず，ACB では領域は 1 減少する．BC は，$...1\|0... \to ...20...$ となり A を生じるので，BCB では次の時刻に領域が減少，BCA では領域の大きさは変化しない．以上からすべての場合に領域は非増加である．また，領域の大きさが一定の場合，領域 C は 1 前に進んでいる．

領域 C が発生するのは，BA もしくは $B'A$ の境界のみであり，$...1\|20... \to ...1\|0\|2...$ または $...2\|20... \to ...1\|0\|2...$ のみであるので，C_1 しか生じない．□

補題 4　領域 B（B' を含む）の数は増加しない．

証明　領域の生成や消滅は，各領域の境界のみで生じる．B を含まない境界 AC や CA で B が生じることはないので B の数は増加しない．□

定理 1 の証明

命題 1 より，系は有限時間ステップで周期軌道に落ち着く．この周期軌道に領域 B が存在すると仮定する．このとき，周期性と補題 4 により，その数は不変である．

いま領域 C のうち周期軌道内で最大の領域を持つものを C_m とする．補題 2 より，$m \geq 2$

としてよい．補題 3 により，周期軌道内では C_m の大きさは変化せず，各時間ステップで 1 前に進む．他方，領域 B は前に進むことはない（AB の境界で 1 を生じて後ろに展開してゆくことはある．）今，周期軌道に入った後のある時刻において，最大の領域を持つ C_m のうち，その前に領域 B が存在するものを一つを選ぶ．（その間に領域 A が存在しても A は B に吸収されるので以下の議論に影響はない．）C_m は進行し，やがて領域 B に衝突する．このとき，領域 B が消滅しない限り C_m はその大きさを 1 減じる．補題 3 より，領域 C が非増加であるため，これは軌道が周期軌道であることと矛盾する．よって，領域 B が存在するとした仮定は正しくなく，領域 B は周期軌道内には存在しない．A と C のみからなる状態は自由走行状態である．以上により，定理 1 が証明された． □

3　最後に

本稿では，STSCA では密度が 1/3 以下では必ず自由走行定常状態に収束することを示した．$\frac{1}{3}$ から $\frac{1}{2}$ まででは，初期状態に依存して完全に自由に走行する状態と中間的な状態–自由に走行する車と止まった車が存在する状態–が現れることは容易に示される．その意味で，$\frac{1}{3}$ は臨界点になっている．しかし，実際に観測されたデータでは，このような臨界点は $\frac{1}{5}$ あたりにあることが示されている [7, 8]．これを再現するには，何らかのモデルの改良が必要である．一つの方法はルール 184CA で行ったファジー化であり [9]，線形安定性を議論すると密度 $\frac{1}{5}$ 近辺で渋滞相が不安定になることが証明される [10]．ファジー化による STSCA についてはまだ不明な点も多く今後の研究の進展が望まれる．また，確率的な拡張も興味深い将来の課題である．

参考文献

[1] K. Nagel and M. Schreckenberg, A cellular automaton model for freeway traffic, Journal de Physique I, EDP Sciences, **2** (12), 2221-2229 (1992).

[2] S. Wolfram: Theory and Applications of Cellular Automata, World Scientific, Singapore (1986).

[3] M. Fukui and Y. Ishibashi, Traffic Flow in 1D Cellular Automaton Model including Cars Moving with High Speed. J. Phys. Socc Jpn., **65**, 1868-1870 (1996).

[4] Lubashevsky, I., Mahnke, R., Wagner, P., Kalenkov, S.: Long-lived states in synchronized traffic flow: Empirical prompt and dynamical trap model, Phys. Rev. E **66**, 016117-1 (2002)

[5] M. Takayasu and H. Takayasu, $1/f$ noize in a traffic model. fractals, **1**(4), 860 – 866 (1993).

[6] A. Schadschneider, D. Chowdhury and K. Nishinari, Stochastic Transport in Com-

plex Systems - From Molecules to Vehicles, Elsevier Science (2011).

[7] F. L. Hall, B. L. Allen, and M. A. Gunter, Empirical analysis of freeway flowdensity relationships, Transportation Research Part A: General, **20**(3):197–210 (1986).

[8] B. S. Kerner, Introduction to Modern Traffic Flow Theory and Control : The Long Road to Three-Phase Traffic Theory. Springer (2009).

[9] K. Higashi, J. Satsuma and T. Tokihiro, Rule 184 fuzzy cellular automaton as a mathematical model for traffic flow, Japan J. Indust. Appl. Math. **38**, 579–609 (2021).

[10] K. Higashi, J. Satsuma and T. Tokihiro, Fuzzy cellular automaton with slow-to-start property, *preprint*.

(原稿提出: 2022 年 10 月 22 日; 修正稿提出: 2023 年 1 月 21 日)