The group of real-analytic diffeomorphisms of the complex projective plane

複素射影平面の実解析的微分同相群 $\mathrm{Diff}^{\omega}(\boldsymbol{C}P^2)_0$

The group of real-analytic diffeomorphisms of the complex projective plane

坪 井 俊[1]
Takashi Tsuboi

概要

実解析的閉多様体の実解析的微分同相群は C^{∞} 級微分同相群の稠密な部分群であり、その恒等写像の連結成分の群は C^{∞} 級微分同相群と同様に完全群（アーベル化が自明）であることが予想される。このことは現在までには特別な円周作用をもつ実解析的多様体と、円周作用を持つ 2 次元 3 次元の多様体に対してしか確かめられていない。本稿ではこの方向の研究に必要な事柄を和文で説明したのち、4 次元実解析的多様体として興味深い複素射影平面 $\boldsymbol{C}P^2$ について実解析的微分同相群の恒等写像の連結成分の群 $\mathrm{Diff}^{\omega}(\boldsymbol{C}P^2)_0$ が完全群であることを英文で示す。

Abstract: We show that the identity component $\mathrm{Diff}^{\omega}(\boldsymbol{C}P^2)_0$ of the group of real-analytic diffeomorphisms of the projective plane $\boldsymbol{C}P^2$ is a perfect group.

1 実解析的微分同相群と円周作用

微分可能多様体は曲面を拡張する位相空間で、局所的に座標が与えられ、解析のできる場を与えてくれる。多様体の微分同相（写像）は無限回微分可能な全単射で逆写像も微分可能となるものである。多様体 M の自己微分同相の全体は群を成し、微分同相群と呼ばれ、$\mathrm{Diff}(M)$ と書かれる。$\mathrm{Diff}(M)$ は微分可能多様体の最も一般の対称性を記述する群である。

$\mathrm{Diff}(M)$ は多様体の間の写像としての位相をもち、C^1 位相について局所可縮である。$\mathrm{Diff}(M)$ の恒等写像の連結成分は群であり、$\mathrm{Diff}(M)_0$ と書かれる。葉層構造の構成や分類の研究の中で Thurston は 1974 年に出版された論文で次を述べている（証明は [1] などにある）。

定理 1.1 (Thurston [5]) $\mathrm{Diff}(M)_0$ は単純群である。

注意 1.2 単純群は、正規部分群として群自身と単位群しか持たないものである。

本稿で扱うのは実解析多様体 M の実解析微分同相群 $\mathrm{Diff}^{\omega}(M)$, その恒等写像成分 $\mathrm{Diff}^{\omega}(M)_0$ である。Herman は n 次元トーラス T^n について 1974 年の論文で次を示している。

定理 1.3 (Herman [2]) $\mathrm{Diff}^{\omega}(T^n)_0$ は単純群である。

Herman は閉多様体 M に対して $\mathrm{Diff}^{\omega}(M)_0$ は単純群であることを予想したが、未解決で

[1] 武蔵野大学数理工学センター員 / 武蔵野大学工学部数理工学科特任教授

ある。Thurston の定理 1.1 の証明は、$\mathrm{Diff}(M)_0$ が完全群であることを示して、それを用いて $\mathrm{Diff}(M)_0$ が単純群であることを示している。実解析微分同相群については、定理 1.1 の証明と同じ方法では、完全群であることから単純群であることを導くことはできない。

注意 1.4　群の 2 元 a,b の交換子とは、$[a,b] = aba^{-1}b^{-1}$ のことであり、交換子の積に書くことのできる元の全体は正規部分群を成し、交換子群と呼ばれる。群を交換子群で割って得られる商の群は、群のアーベル化（可換化）である。群は、群自身が交換子群と一致するとき、完全群であるといわれる。無限単純群は完全群である（完全群ではない単純群は交換子群が単位元だけからなりアーベル群であるが、アーベル群が単純群となるのは素数位数の有限巡回群のときだけである)。

Herman の予想よりも弱く、$\mathrm{Diff}^\omega(M)_0$ が完全群であることを予想し、これを示すことを考えた。以前の研究で次を得ている。$U(1)$ は絶対値 1 の複素数のなす乗法群である：

$$U(1) = \{z \in \boldsymbol{C} \bigm| |z| = 1\} = \{e^{2\pi\sqrt{-1}t} \in \boldsymbol{C} \bigm| t \in \boldsymbol{R}\}.$$

$U(1)$ は平面には回転として作用する。

定理 1.5　([6]) M^n が自由 $U(1)$ 作用または特殊半自由 $U(1)$ 作用を許容する、または次元 $n = 2, 3$ で M^n が $U(1)$ 作用を許容するならば、$\mathrm{Diff}^\omega(M^n)_0$ は完全群である。

群 G の M への作用とは、写像 $G \times M \ni (g,x) \longmapsto g \cdot x \in M$ で、

$$g_1 \cdot (g_2 \cdot x) = (g_1 g_2) \cdot x \quad (g_1,\, g_2 \in G), \quad \mathbf{1} \cdot x = x\ (\mathbf{1}\ \text{は単位元})$$

を満たすものである。群作用が自由であるとは、単位元以外の群の元の作用は固定点をもたないことである。点 $x \in M$ に対し、x の固定群 (isotropy subgroup)I_x が

$$I_x = \{g \in G \bigm| g \cdot x = x\}$$

で定義される。群作用が半自由であるとは、固定群 I_x が $\{\mathbf{1}\}$ または G に一致することをいう。すなわち、群作用の固定点以外では、自由作用となるものである。特殊半自由作用とは、$n-1$ 次元の境界付き多様体 N^{n-1} に対し、$N^{n-1} \times U(1)$ の境界 $\partial N^{n-1} \times U(1)$ を（$x \in \partial N^{n-1}$ に対し $\{x\} \times U(1)$ を 1 点に同一視して）∂N^{n-1} に同一視して得られる多様体

$$M^n = N^{n-1} \times U(1)/(\partial N^{n-1} \times U(1) \sim \partial N^{n-1})$$

上の自然な $U(1)$ 作用である。概要で述べている円周作用とは $U(1)$ 作用のことである。

論文 [6] では、一般の $U(1)$ 作用をもつ多様体 M^n に対し、次を示している。

命題 1.6　([6, Proposition 9.1]) M^n が $U(1)$ 作用を許容するならば、$\mathrm{Diff}^\omega(M^n)_0$ の任意の元は、各 $U(1)$ 軌道上で回転であるような元にホモロガスである。

注意 1.7　交換子群による商群はアーベル化と呼ばれるのであるが、群の 1 次元ホモロジー群とも呼ばれる。そこで交換子群を法として合同であることをホモロガスであるという。

論文 [6] において、定理 1.5 は命題 1.6 を用いて示されている。各 $U(1)$ 軌道上で回転であるような実解析的微分同相を交換子積に書くことで定理 1.5 は示される。多様体の次元が 2, 3 の場合は、$U(1)$ 作用の構造の記述が容易であり、定理が得られた。次元が 4 以上になると現状では $U(1)$ 軌道の位相が複雑で $U(1)$ 作用があることだけの仮定の下では同じことが実行できていない。本稿では 4 次元多様体上の $U(1)$ 作用の典型例が現れる複素射影平面 $\boldsymbol{C}P^2$ 上の複素射影一般線型群 $PGL(3;\boldsymbol{C})$ 作用の部分 $U(1)$ 作用を用いて、$\mathrm{Diff}^\omega(\boldsymbol{C}P^2)_0$ が完全群であることを示す。

定理 1.8　$\mathrm{Diff}^\omega(\boldsymbol{C}P^2)_0$ は完全群 (perfect group) である。

2　4 次元多様体上の $U(1)$ 作用

多様体 M 上の $U(1)$ 作用について、M 上のリーマン計量を $U(1)$ 作用について平均することにより、$U(1)$ 作用はリーマン計量を保つと仮定してよい。多様体の点 $x \in M$ の固定群 $I_x = \{u \in U(1) \mid u \cdot x = x\}$ は、$U(1)$ の閉部分群であり、有限巡回群または $U(1)$ となる。固定群 I_x は、x の $U(1)$ 軌道

$$U(1) \cdot x = \{u \cdot x \mid u \in U(1)\}$$

の x における法ベクトル空間に線形に作用する。これは I_x から直交群への準同型で記述される。以後 M の次元を 4 とする。4 次元多様体上の $U(1)$ 作用の記述は、Fintushel ([3], [4]) により得られている。

固定群 I_x が有限巡回群 $\{u \in U(1) \mid u^k = 1\} \cong \boldsymbol{Z}/k\boldsymbol{Z}$ $(k \geqq 2)$ のとき、x の軌道 $U(1) \cdot x$ は、多重軌道と呼ばれるが、多重軌道の法ベクトル束に対し、3 次直交群 $O(3)$ の位数 k の元 h が存在し、多重軌道の近傍は、$\boldsymbol{R}^3 \times U(1)$ の $\boldsymbol{Z}/k\boldsymbol{Z}$ 作用

$$e^{2\pi m\sqrt{-1}/k} \cdot (v, w) = (h^m v, e^{2\pi m\sqrt{-1}/k} w) \quad (m \in \boldsymbol{Z}/k\boldsymbol{Z})$$

による商の空間 $(\boldsymbol{R}^3 \times U(1))/(\boldsymbol{Z}/k\boldsymbol{Z})$ の多重軌道 $(\{0\} \times U(1))/(\boldsymbol{Z}/k\boldsymbol{Z})$ の近傍と $U(1)$ 作用を込めて実解析的に微分同相である。

h となり得る $O(3)$ の位数 $k > 2$ の元は $\boldsymbol{C} \times \boldsymbol{R}$ の座標で次のようなものである。

- $\begin{pmatrix} e^{2\pi\ell\sqrt{-1}/k} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad ((k, \ell) = 1)$,
- $\begin{pmatrix} e^{2\pi\ell\sqrt{-1}/k} & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (k$ は偶数、$(k, \ell) = 1)$,
- $\begin{pmatrix} e^{4\pi\ell\sqrt{-1}/k} & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (k$ は奇数の 2 倍、$(k, \ell) = 1)$.

最初の場合は $\boldsymbol{C}$ 方向の回転であり、k 重軌道は $\boldsymbol{R}$ 方向に連なっていて、横断的に 1 次元、軌道方向を含めれば 2 次元の部分多様体を成す。残りの場合、横断的に回転であるような $\dfrac{k}{2}$ 重軌道が $\boldsymbol{R}$ 方向に連なっていて、横断的に 1 次元、軌道方向を含めれば 2 次元の部分多様体を成す。

h となり得る $O(3)$ の位数 2 の元は、$\begin{pmatrix} \pm 1 & 0 & 0 \\ 0 & \pm 1 & 0 \\ 0 & 0 & \pm 1 \end{pmatrix}$ の形の非自明な行列であり、この形の軌道が孤立しているか、横断的に 1 次元または 2 次元の族を成している。

固定群 $I_x = U(1)$ のとき、4 次直交群 $O(4)$ の $U(1)$ と同型な閉部分群が定まる。このような部分群は互いに素な整数 $p,\ q$（$(p,q)=1$ と書く）に対し、$U(1)$ の $\boldsymbol{C}^2$ への作用

$$U(1) \times \boldsymbol{C}^2 \ni (u,z,w) \longmapsto (u^p z, u^q w) \in \boldsymbol{C}^2$$

と共役になる。固定点の近傍は、$\boldsymbol{C}^2$ の原点の近傍と $U(1)$ 作用を込めて実解析的に微分同相である。このとき、$\boldsymbol{C} \times \{0\}$ 上の点の固定群は $\{u \in U(1) \mid u^p = 1\} \cong \boldsymbol{Z}/p\boldsymbol{Z}$ で、$\boldsymbol{C} \times \{0\}$ 上の点の軌道は p 重軌道であり、$\{0\} \times \boldsymbol{C}$ 上の点の固定群は $\{u \in U(1) \mid u^q = 1\} \cong \boldsymbol{Z}/q\boldsymbol{Z}$ で、$\{0\} \times \boldsymbol{C}$ 上の点の軌道は q 重軌道である。この固定点の周りの軌道は、固定点を中心とする同心（3 次元）球面上では (p,q) トーラス結び目となっている。$(p,q)=(\pm 1, 0)$ の場合には、$\{0\} \times \boldsymbol{C}$ 上の点は固定点であり、$(p,q)=(0,\pm 1)$ の場合には、$\boldsymbol{C} \times \{0\}$ 上の点は固定点である。

4 次元多様体上 M^4 の $U(1)$ 作用に対しては、以上のような形で定まる k 重多重軌道の族、固定点の族によるストラティフィケーションが存在している。

ストラティフィケーションの様子を記述するためにも、$U(1)$ 作用の商空間である軌道空間 $M^4/U(1)$ を考えるとよい。

軌道空間 $M^4/U(1)$ において自由軌道全体の像は 3 次元多様体となり、$M^4/U(1)$ はそのコンパクト化の形状をしている。$M^4/U(1)$ には M^4 上の軌道間の距離に対応する距離が定義され、多重軌道の像、固定点の像は、錐として記述される。

横断的に回転となる固定群をもつ多重軌道の近傍の像は、位相的には 1 次元の多重軌道の像を零切断とする円板束 (circle bundle)（距離を考えれば頂点の周りの角が $\dfrac{2\pi}{k}$ の円錐の束 (cone bundle)）の形になる。他の多重軌道の像は多重軌道の弧の端点となる。ただし、固定群の位数が 2 で作用が $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ の軌道の像は孤立点で近傍は実射影平面 $\boldsymbol{R}P^2$ の錘

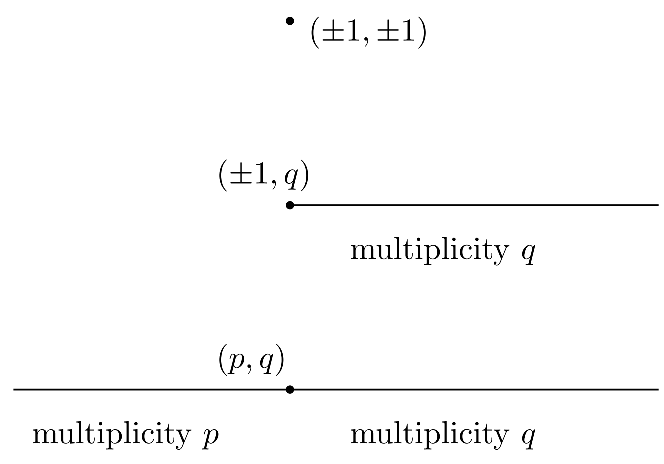

図 1　$|pq| \geqq 1$ のときの (p,q) 型固定点の近傍の多重軌道の像

の形状であり、作用が $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ の軌道の像は 2 次元で $M^4/U(1)$ の境界を成している。

固定点の軌道空間 $M^4/U(1)$ における近傍では、$U(1)$ 作用が $(z,w) \longmapsto (u^p z, u^q w)$ $((p,q)=1)$ で $|pq| \geqq 1$ のとき、$M^4/U(1)$ の孤立点で、p 重軌道の商の弧、q 重軌道の商の弧の端点となっている。p, q が ± 1 のときは自由軌道の像の正則点となる。この固定点の軌道空間 $M^4/U(1)$ における近傍は頂点の周りの角が $\dfrac{2\pi}{p}$ と $\dfrac{2\pi}{q}$ の 2 個の錘点を持つ 2 次元球面（オービフォールド）の錐の形状である。図 1 参照。$(p,q)=(\pm 1,0)$ または $(p,q)=(0,\pm 1)$ のとき、固定点は $M^4/U(1)$ の境界を成している。

3　複素射影平面 CP^2 上の $U(1)$ 作用

複素射影平面 $\boldsymbol{C}P^2$ は、3 次元複素ベクトル空間 $\boldsymbol{C}^3$ の複素 1 次元部分空間のなす空間であり、$\boldsymbol{C}^3 \setminus \{0\}$ 上の $\boldsymbol{C}^\times = \boldsymbol{C} \setminus \{0\}$ のスカラー倍による作用の軌道の空間である：

$$\boldsymbol{C}P^2 = (\boldsymbol{C}^3 \setminus \{0\})/\boldsymbol{C}^\times.$$

$(x, y, z) \in \boldsymbol{C}^3 \setminus \{0\}$ の同値類の複素射影平面 $\boldsymbol{C}P^2$ 上の点は、同次座標 $[x : y : z]$ で表示される。

$\boldsymbol{C}^3 \setminus \{0\}$ には、3 次複素一般線型群 $GL(3; \boldsymbol{C})$ が作用しているが、この作用は複素数体 $\boldsymbol{C}$ の乗法群 $\boldsymbol{C}^\times$ のスカラー倍の作用と可換であるから、$GL(3; \boldsymbol{C})$ は $\boldsymbol{C}P^2$ に作用する。ただし、スカラー倍は $\boldsymbol{C}P^2$ に自明に作用するから、効果的に作用するのは複素射影一般線型群 $PGL(3; \boldsymbol{C}) = GL(3; \boldsymbol{C})/\boldsymbol{C}^\times$ である。

$GL(3; \boldsymbol{C})$ の $U(1)$ と同型な部分群は、ある極大部分アーベル群に含まれるが、$GL(3; \boldsymbol{C})$ の極大部分アーベル群は、対角行列なす部分群 $\cong \boldsymbol{C}^\times \times \boldsymbol{C}^\times \times \boldsymbol{C}^\times$ に共役である。$U(1)$ は絶対値 1 の対角成分を持つ対角行列のなす部分群 $\cong U(1) \times U(1) \times U(1) \cong T^3$ の部分群と共役である。従って、$PGL(3; \boldsymbol{C})$ の $U(1)$ と同型な部分群は、商の群

$$(U(1) \times U(1) \times U(1))/U(1) \cong T^2 \cong U(1) \times U(1)$$

の部分群と同型となる。このような部分群は、$U(1) \times U(1)$ のそれぞれの成分を p 回と q 回 $((p, q) = 1)$ まわる円周の形になる。

以上の考察から、複素射影平面 $\boldsymbol{C}P^2$ への $PGL(3; \boldsymbol{C})$ 作用の部分作用となる $U(1)$ 作用は、$(p, q) = 1$ なる整数 p, q に対し、

$$U(1) \times \boldsymbol{C}P^2 \ni (u, [x : y : z]) \longmapsto u \cdot [x : y : z] = [u^p x : u^q y : z] \in \boldsymbol{C}P^2$$

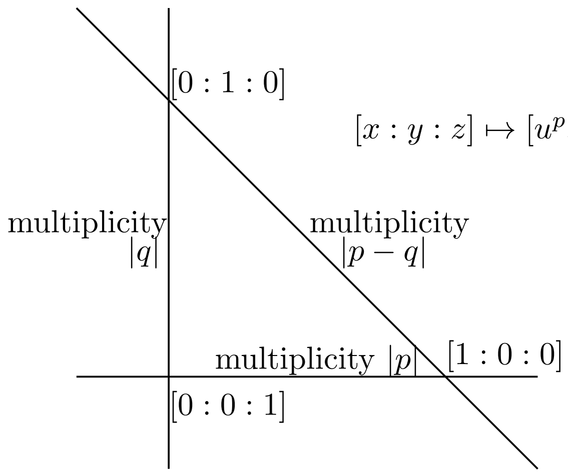

図 2　$\boldsymbol{C}P^2$ 上の $PGL(3; \boldsymbol{C})$ 作用の部分作用となる $U(1)$ 作用の概念図
座標軸と無限遠複素直線が直線で描かれている

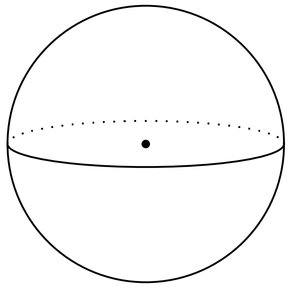

図 3　$\boldsymbol{C}P^1 \sqcup \{1\ \mathrm{pt}\}$ を固定点とする $U(1)$ 作用の軌道空間

で与えられる。図 2 参照。$pq \neq 0,\ 1$ のとき固定点集合は 3 点集合であり、$pq = 0,\ 1$ のとき固定点集合は 1 点と射影直線の和集合となる。それぞれの場合をより詳しく調べると以下のようになる。

固定点集合が 1 点と射影直線の和集合（$pq = 0,\ 1$）の場合：

- 座標の取り換え、$U(1)$ の元の複素共役により、作用は
$$u \cdot [x : y : z] = [ux : uy : z] = [x : y : \overline{u}z]$$
に共役である。
- このとき固定点集合は $\{[0 : 0 : 1]\} \sqcup \{[x : y : 0]\} \cong \{1\ \mathrm{pt}\} \sqcup \boldsymbol{C}P^1$ となる。
- $\dfrac{|x|^2 + |y|^2}{|z|^2}$ が一定の正実数となる 3 次元球面上で $U(1)$ 軌道は 2 次元球面である 1 次元射影直線 $\{[x : y : 0]\}$ 上のホップ・ファイバー束のファイバーであり、$\boldsymbol{C}P^2$ をホップ・ファイバー束 $S^3 \longrightarrow \boldsymbol{C}P^1$ の写像柱とホップ・ファイバー束上の錐を貼り合わせとみて、自然な $U(1)$ 作用を導入したものとみなせる。
- 商の空間（軌道空間）は 3 次元の球体 D^3 で中心が固定点 $\{[0 : 0 : 1]\}$ の像であり、境界が $\{[x : y : 0]\}$ の像である。図 3 参照。
- 軌道空間への軌道間の距離を保つ写像は、固定点において微分可能にならない。軌道空間への実解析的写像 $\boldsymbol{C}P^2 \longrightarrow D^3 = \{(\alpha, b) \in \boldsymbol{C} \times \boldsymbol{R} \mid |\alpha|^2 + b^2 \leqq 1\}$ は、例えば次で与えられる。
$$[x : y : z] \longmapsto= \frac{1}{|x|^2 + |y|^2 + |z^2|}(2x\overline{y}, |x|^2 - |y|^2)$$
これは 2 対 1 の写像である。

固定点集合が 3 点（$pq \neq 0,\ 1,\ (p, q) = 1$）の場合：

- $U(1)$ 作用
$$u \cdot [x : y : z] = [u^p x : u^q y : z]$$
の固定点は、$[0 : 0 : 1],\ [0 : 1 : 0],\ [1 : 0 : 0]$ の 3 点である。

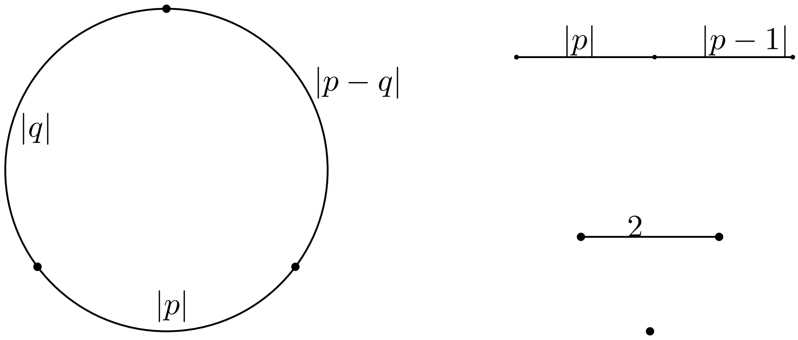

図 4　固定点が 3 点となる場合の軌道空間

- $[0:0:1]$ の局所座標 $(x,y)=[x:y:1]$ で、作用は $u\cdot(x,y)=(u^p x, u^q y)$,
  $[0:1:0]$ の局所座標 $(x,z)=[x:1:z]$ で、作用は $u\cdot(x,z)=(u^{p-q}x, u^{-q}z)$,
  $[1:0:0]$ の局所座標 $(x,y)=[1:y:z]$ で、作用は $u\cdot(y,z)=(u^{q-p}y, u^{-p}z)$
  と書かれる。
- $\{z=0\}=\{[x:y:0]\}\cong\boldsymbol{C}P^1$ 上の固定点以外の軌道は $|p-q|$ 重の軌道であり、
  $\{y=0\}=\{[x:0:z]\}\cong\boldsymbol{C}P^1$ 上の固定点以外の軌道は $|p|$ 重の軌道であり、
  $\{x=0\}=\{[0:y:z]\}\cong\boldsymbol{C}P^1$ 上の固定点以外の軌道は $|q|$ 重の軌道である。
- 商の空間（軌道空間）は、3 次元球面に同相である。
- $(p,q)=(\pm1,\mp1)$, $(\pm2,\pm1)$ のとき、軌道空間には、2 重軌道の像となる弧とその両端の固定点の像、および 孤立した固定点の像が描かれる。図 4 の右下の図参照。
- $(p,q)\neq(\pm1,\mp1)$, $(\pm2,\pm1)$ の場合で $(p,q)=(p,\pm1)$, $(p,p\pm1)$ のとき、軌道空間には、p 重軌道の像となる弧と $p\pm1$ 重軌道の像となる弧が固定点の像を共有する形の弧が描かれ、弧の両端は固定点の像となる。図 4 の右上の図参照。
- これら以外の場合、軌道空間には固定点の像となる 3 点を含む円周が多重軌道の像となり、3 つの弧は $|p|$ 重、$|q|$ 重、$|p-q|$ 重の軌道の像となる。図 4 の左の図参照。

4　各 $U(1)$ 軌道上で回転であるような実解析的微分同相

命題 1.6 により、定理 1.8 を示すには各 $U(1)$ 軌道上で回転であるような実解析的微分同相を実解析的微分同相の交換子積に書けることを示せばよい。そのために各 $U(1)$ 軌道上で回転であるような実解析的微分同相を各軌道を保つ実解析的微分同相の交換子積に書くことを考える。各軌道上では円周の微分同相を考えているので、軌道空間をパラメータとする微分同相の族を考えていることになる。

円周を実平面の単位円と考え、単位円と原点から出る半直線とを同一視すると、$SL(2;\boldsymbol{R})$ の単位円上の作用が得られる。平面への $SL(2;\boldsymbol{R})$ の線形作用 $SL(2;\boldsymbol{R})\times\boldsymbol{R}^2\longrightarrow\boldsymbol{R}^2$ は $\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}ax+by\\ cx+dy\end{pmatrix}$ であるから、単位円上への作用は

$$\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\frac{1}{\sqrt{(ax+by)^2+(cx+dy)^2}}\begin{pmatrix}ax+by\\ cx+dy\end{pmatrix}$$

と書かれる。行列の極分解を考えれば、$SL(2;\boldsymbol{R})$ は、対角行列と回転行列で生成される。複素数平面で考えれば回転は $u\in U(1)$ の積 $(u,z)\longmapsto uz$ と書かれ、本稿では使いやすい。$A=\begin{pmatrix}a & 0\\ 0 & a^{-1}\end{pmatrix}$, $z\in\boldsymbol{C}$ に対し、

$$Az=A(x+yi)=ax+a^{-1}y=\frac{1}{2}(a+\frac{1}{a})z+\frac{1}{2}(a-\frac{1}{a})\overline{z}$$

とおくと、$z\in\{|z|=1\}$ への作用は、

$$A\cdot z=\frac{Az}{|Az|}\in\{|z|=1\}$$

と定義される。

固定点のある場合の典型例である複素数平面の同心円 $\{|z|=r\mid r\in[0,1]\}$ に対し、A の対角成分 a を r の関数としてうまくとれば、各同心円を保つ実解析的作用が定義できる。すなわち、

$$A\cdot z=|z|\Big(A\cdot\frac{z}{|z|}\Big)=|z|\,\frac{A(z/|z|)}{|A(z/|z|)|}$$

において、$A(z/|z|)=(Az)/|z|$ だから、

$$A\cdot z=|z|\,\frac{Az}{|Az|}=z\,\frac{Az}{z}\left|\frac{z}{Az}\right|$$

である。ここで

$$\frac{Az}{z}=\frac{1}{2}(a+\frac{1}{a})+\frac{1}{2}(a-\frac{1}{a})\frac{\overline{z}}{z}=\frac{1}{2}(a+\frac{1}{a})+\frac{1}{2}\frac{a+1}{a}\frac{a-1}{z\overline{z}}\overline{z}^2$$

であるから、$a-1$ が、$z\overline{z}=|z|^2$ で割り切れていれば、すなわち $a(z)=z\overline{z}(1+\alpha z\overline{z}+\cdots)$ のように収束冪級数で書かれていれば、$z\longmapsto A\cdot z$ は実解析的作用である。

円周上の回転を $SL(2;\boldsymbol{R})$ 内で交換子積に書く方法も明示する必要がある。2θ 回転の行列 $\begin{pmatrix}\cos 2\theta & -\sin 2\theta\\ \sin 2\theta & \cos 2\theta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix}X & -Y\\ Y & X\end{pmatrix}^2$ について

$$\begin{pmatrix}X & -Y\\ Y & X\end{pmatrix}^2=\left[\begin{pmatrix}1/a & 0\\ 0 & a\end{pmatrix},\begin{pmatrix}W & Z\\ Z & W\end{pmatrix}\right]\left[\begin{pmatrix}W & Z\\ Z & W\end{pmatrix},\begin{pmatrix}X & -Y\\ Y & X\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & 0\\ 0 & 1/a\end{pmatrix}\right]$$

と表される。ここで

$$\begin{pmatrix}W & Z\\ Z & W\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}X & \frac{2a^2Y}{a^4-1}\\ \frac{2a^2Y}{a^4-1} & X\end{pmatrix}\Big/\sqrt{\det}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}W+Z & 0\\ 0 & W-Z\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$$

であり、

$$\begin{aligned}W+Z-1&=\frac{1}{\sqrt{X^2-\dfrac{4a^4Y^2}{(a^4-1)^2}}}\left(X+\frac{2a^2Y}{a^4-1}\right)-1\\&=\frac{1}{\sqrt{1-\dfrac{(a^4+1)^2Y^2}{(a^4-1)^2}}}\left(\sqrt{1-Y^2}-\sqrt{1-\frac{(a^4+1)^2Y^2}{(a^4-1)^2}}+\frac{2a^2Y}{a^4-1}\right)\\&=\frac{1}{\sqrt{1-\dfrac{(a^4+1)^2Y^2}{(a^4-1)^2}}}\left(\frac{\dfrac{4a^4Y^2}{(a^4-1)^2}}{\sqrt{1-Y^2}+\sqrt{1-\dfrac{(a^4+1)^2Y^2}{(a^4-1)^2}}}+\frac{2a^2Y}{a^4-1}\right)\end{aligned}$$

である。$\dfrac{Y}{a^4-1}=\dfrac{1}{(a^2+1)(a+1)}\dfrac{Y}{a-1}$ だから、この交換子積の表示に現れる $SL(2;\boldsymbol{R})$ の行列が、$a=1$ となる点において実解析的であるためには、$a-1$ が Y $(=\sin\theta\sim\theta$ 軌道上の回転角）を割り切り、$\dfrac{Y}{a-1}$ が $a=1$ となる点において 0 となればよい。

従って、命題 1.6 で得られる各 $U(1)$ 軌道上で回転であるような実解析的微分同相 f の各軌道の回転角が $a-1$ で割り切れ、各 $U(1)$ 軌道に $SL(2;\boldsymbol{R})$ またはその被覆群が作用できれば、f は交換子積に書かれる。定理 1.5 は、条件を満たす $U(1)$ 作用に対し、実解析的微分同相が軌道を保つ実解析的微分同相の交換子積の共役の積に書かれることから示された。

5 Proof of the perfectness of $\mathrm{Diff}^\omega(\boldsymbol{C}P^2)_0$ 主定理 1.8 の証明

We show the perfectness of $\mathrm{Diff}^\omega(\boldsymbol{C}P^2)_0$ using the natural $U(1)$ actions on $\boldsymbol{C}P^2$. The $U(1)$ actions should have fixed point set either diffeomorphic to $\boldsymbol{C}P^1 \sqcup \{1 \text{ pt}\}$ or a 3 point set. The Euler characteristic number of the fixed point set of a $U(1)$ action is the same as that of the manifold by Smith's theorem and it is of course verified. Since we would like to show that the existence of any $U(1)$ action would imply the perfectness of the group of real analytic diffeomorphisms, we show the perfectness of $\mathrm{Diff}^\omega(\boldsymbol{C}P^2)_0$ by using both types of $U(1)$ actions.

In [6, Proposition 9.1], we showed that any real analytic diffeomorphism isotopic to the identity is homologous to an orbitwise rotation. Hence to show the perfectness of the group it is enough to show that any orbitwise rotation can be written as a product of commutators of real analytic diffeomorphisms. In view of the argument in [6] using the legimentation lemma [6, Theorem 7.1] and the generalization [6, Theorem 5.3] of Arnold's theorem, our assertion that orbitwise rotations can be written as products of commutators reduces to the case where the orbitwise rotations are flat along certain real-analytic sets. Hence it is enough to show that orbitwise rotations which are flat along certain real-analytic sets can be written as products of commutators of orbit preserving real-analytic diffeomorphisms.

When the orbitwise rotation is flat along certain real-analytic sets, the argument in [6, Lemma 3.1], [6, Lemma 3.3] and [6, Lemma 3.4] can be summarized as follows:

Proposition 5.1 For a $U(1)$ invariant non-negative real-analytic function P on M, assume that there is an orbitwise diagonal matrix (hyperbolic) action A on M with the diagonal component a and a^{-1}, and that P divides $a-1$ implies A is real analytic on M. Then orbitwise rotations close to the identity with angle divisible by P^2 can be written as a product of 2 commutators by rotations and diagonal matrices with difference of the identity divisible by P and thus as a product of 2 commutators by real-analytic orbit preserving diffeomorphisms.

5.1 $U(1)$ action fixing $\boldsymbol{C}P^1 \sqcup \{1 \text{ pt}\}$

We use the $U(1)$ action on $\boldsymbol{C}P^2$ given by $u \cdot [x:y:z] = [ux:uy:z] = [x:y:u^{-1}z]$ for $u \in U(1)$. The fixed of this action is $\{z=0\} \sqcup \{[0:0:1]\}$. In order to make $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1/a \end{pmatrix}$ with a being U(1) invariant real-analytic function act on the $U(1)$ orbits, we need a trivialization for free $U(1)$ orbits in $\boldsymbol{C}P^2 \setminus (\{z=0\} \sqcup \{[0:0:1]\})$ which form a $U(1)$ bundle. The $U(1)$ action on the part $\boldsymbol{C}P^2 \setminus (\{x=0\} \cup \{z=0\})$ can be trivialized as follows:

$$\boldsymbol{C}P^2 \setminus (\{x=0\} \cup \{z=0\}) \ni [x:y:1] \longmapsto (r,w,u) = (|x|, \frac{y}{x}, \frac{x}{|x|}) \in \boldsymbol{R}_{>0} \times \boldsymbol{C} \times U(1).$$

Then $x = ru$, $y = ruw$, and we see that $[ux : uy : 1] \longmapsto ((|x|, \frac{y}{x}), \frac{ux}{|x|})$ as expected. By using this trivialisation we make A act on the $U(1)$ factor $\dfrac{x}{|x|}$ and we have

$$A \cdot (\frac{x}{|x|}) = \frac{A(x/|x|)}{|A(x/|x|)|} = \frac{Ax}{|Ax|} = \frac{x}{|x|}\frac{Ax}{x} \Big/ \left|\frac{Ax}{x}\right|$$

where

$$Ax = a\frac{x+\overline{x}}{2} + \frac{1}{a}\frac{x-\overline{x}}{2} = \frac{1}{2}(a+\frac{1}{a})x + \frac{1}{2}(a-\frac{1}{a})\overline{x}$$

and on the homogeneous coordinates it is written as

$$A \cdot [x:y:1] = \left[x\frac{Ax}{x} \Big/ \left|\frac{Ax}{x}\right| \ : \ y\frac{Ax}{x} \Big/ \left|\frac{Ax}{x}\right| \ : \ 1 \right].$$

Since

$$\frac{Ax}{x} = \frac{1}{2}(a+\frac{1}{a}) + \frac{1}{2}(a-\frac{1}{a})\frac{\overline{x}}{x} = \frac{1}{2}(a+\frac{1}{a}) + \frac{1}{2}\frac{a+1}{a}\frac{a-1}{x\overline{x}}\overline{x}^2$$

as is appeared before, if $a-1$ is divisible by $|x|^2$, then the orbitwise action A can be extended real-analytically to $\{x=0\}$, hence the action of A is real analytic on $\boldsymbol{C}P^2 \setminus \{z = 0\}$.

To find the condition for the action of A to extend to $\{z=0\}$, we write the action in the coordinates on $\boldsymbol{C}P^2 \setminus \{x=0\}$ and on $\boldsymbol{C}P^2 \setminus \{y=0\}$).

In the coordinates on $\boldsymbol{C}P^2 \setminus \{x=0\}$, the action of A is written as follows:

$$\begin{aligned}
[1:y:z] &= \left[\frac{1}{z} : \frac{y}{z} : 1\right] \\
\longmapsto &\left[\frac{1}{z}\frac{A(1/z)}{1/z} \Big/ \left|\frac{A(1/z)}{1/z}\right| \ : \ \frac{y}{z}\frac{A(1/z)}{1/z} \Big/ \left|\frac{A(1/z)}{1/z}\right| \ : \ 1\right] \\
&= \left[1 : y : z\left|\frac{A(1/z)}{1/z}\right| \Big/ \frac{A(1/z)}{1/z}\right] \\
&= \left[1 : y : z\left|\frac{A(\overline{z})}{\overline{z}}\right| \Big/ \frac{A(\overline{z})}{\overline{z}}\right].
\end{aligned}$$

Hence if $a-1$ is divisible by $|z|^2$, the orbitwise action A can be extended real-analytically to $\{z=0\}$.

In the coordinates on $\boldsymbol{C}P^2 \setminus \{y=0\}$, the action of A is written as follows:

$$
\begin{aligned}
&[x:1:z] = \left[\frac{x}{z} : \frac{1}{z} : 1\right] \\
\longmapsto &\left[\frac{x}{z}\frac{A(x/z)}{x/z}\Big/\left|\frac{A(x/z)}{x/z}\right| \ : \ \frac{1}{z}\frac{A(x/z)}{x/z}\Big/\left|\frac{A(x/z)}{x/z}\right| \ : \ 1\right] \\
= &\left[x : 1 : z\left|\frac{A(x/z)}{x/z}\right|\Big/\frac{A(x/z)}{x/z}\right] \\
= &\left[x : 1 : z\left|\frac{A(x\overline{z})}{x\overline{z}}\right|\Big/\frac{A(x\overline{z})}{x\overline{z}}\right].
\end{aligned}
$$

Hence if $a-1$ is divisible by $|x|^2|z|^2$, the orbitwise action A can be extended real-analytically to $\{x=0\} \cup \{z=0\}$.

Summing up these, if $a-1$ is divisible by $|x|^2|z|^2$, the orbitwise action A is real-analytic on the whole $\boldsymbol{C}P^2$.

Put $P = \dfrac{|x|^2|z|^2}{(|x|^2+|y|^2+|z|^2)^2}$ and put $a = 1+P$. By Proposition 5.1, an orbitwise rotation near the identity whose rotation angle θ along the orbit is divisible by P^2 can be written as a product of 2 commutators of orbit preserving real-analytic diffeomorphisms.

Thus using the $U(1)$ action $U(1)$ action fixing $\boldsymbol{C}P^1 \sqcup \{1 \text{ pt}\}$, we showed that $\mathrm{Diff}^\omega(\boldsymbol{C}P^2)_0$ is a perfect group.

5.2 $U(1)$ actions with 3 fixed points

For coprime integers p and q, let us consider the $U(1)$ action $u\cdot[x:y:z] = [u^p x : u^q y : z]$. The fixed point set of this action is $\{[0:0:1],[0:1:0],[1:0:0]\}$ and multiple orbits are contained in $\{x=0\} \cup \{y=0\} \cup \{z=0\}$. The multiplicities of nontrivial orbits in $\{x=0\}$, $\{y=0\}$ and $\{z=0\}$ are $|q|$, $|p|$ and $|p-q|$, respectively. Since the regular orbits are locally $|q|$ fold, $|p|$ fold and $|p-q|$ fold coverings of the multiple orbits in $\{x=0\}$, $\{y=0\}$ and $\{z=0\}$, respectively, if A acts on the multiple orbits nontrivially, then A acts nearby free orbits as its lift to $|q|$ fold, $|p|$ fold and $|p-q|$ fold coverings of the action on the multiple orbits. Thus if A acts on $\boldsymbol{C}P^2$ and nontrivially on the multiple orbits, A acts on the free orbits as the lift to the $k = |pq(p-q)|$ fold covering of the action on $U(1)$, where $k = |pq(p-q)|$ is the least common multiple of $|q|$, $|p|$ and $|p-q|$.

In order to define the action on the k fold covering, we make A act on u^k ($u \in U(1)$) and take the k-th root $(A\cdot(u^k))^{1/k}$ which is isotopic to the identity by as A tends to the identity. If the action of A on $U(1)$ has 4 fixed points, then $u \longmapsto (A\cdot(u^k))^{1/k}$ has $4k$ fixed points.

We assume that $p > q > 0$ for the notational simplicity and $k = pq(p-q)$.

On $\boldsymbol{C}P^2 \setminus (\{x=0\} \cup \{z=0\})$, take the coordinates $[x:y:1]$. Then the $U(1)$ action is given by $u\cdot[x:y:1]=[u^px:u^qy:1]$. Since the free orbits has multiplicity p in the direction of x, it is appropriate to make A act on $\big(\dfrac{x}{|x|}\big)^{k/p}=\big(\dfrac{x}{|x|}\big)^{q(p-q)}$. Consider the map

$$\boldsymbol{C}P^2\setminus(\{x=0\}\cup\{z=0\})\ni[x:y:1]\longmapsto(r,w,u)=(|x|,\frac{y^p}{x^q},\frac{x^{k/p}}{|x^{k/p}|})\in\boldsymbol{R}_+\times\boldsymbol{C}\times U(1).$$

Then $x=ru^{p/k}$ and $y=(wr^qu^{1/(p-q)})^{1/p}=r^{q/p}w^{1/p}u^{q/k}$. Let $A=\begin{pmatrix}a&0\\0&1/a\end{pmatrix}$ act on the $U(1)$ factor $u=\dfrac{x^{k/p}}{|x^{k/p}|}$:

$$(|x|,\ \frac{y^p}{x^q},\ \frac{x^{k/p}}{|x^{k/p}|})\longmapsto(|x|,\ \frac{y^p}{x^q},\ A\cdot(\frac{x^{k/p}}{|x^{k/p}|}))=(|x|,\ \frac{y^p}{x^q},\ \frac{A(x^{k/p})}{|A(x^{k/p})|})\ .$$

Then

$$x\longmapsto|x|\left(\frac{A(x^{k/p})}{|A(x^{k/p})|}\right)^{p/k}=x\left(\frac{A(x^{k/p})}{x^{k/p}}\right)^{p/k}\left(\left|\frac{A(x^{k/p})}{x^{k/p}}\right|\right)^{-p/k}$$

and

$$y\longmapsto|x|^{q/p}\frac{y}{x^{q/p}}\left(\frac{A(x^{k/p})}{|A(x^{k/p})|}\right)^{q/k}=y\left(\frac{A(x^{k/p})}{x^{k/p}}\right)^{q/k}\left(\left|\frac{A(x^{k/p})}{x^{k/p}}\right|\right)^{-q/k}.$$

Hence the action of A on $[x:y:1]$ is given as follows:

$$[x:y:1]\longmapsto\\ \left[x\left(\frac{A(x^{k/p})}{x^{k/p}}\right)^{p/k}\left(\left|\frac{A(x^{k/p})}{x^{k/p}}\right|\right)^{-p/k}:\ y\left(\frac{A(x^{k/p})}{x^{k/p}}\right)^{q/k}\left(\left|\frac{A(x^{k/p})}{x^{k/p}}\right|\right)^{-q/k}:\ 1\right].$$

Here

$$\frac{A(x^{k/p})}{x^{k/p}}=\frac{1}{2}(a+\frac{1}{a})+\frac{1}{2}\frac{a+1}{a}\frac{a-1}{(x\overline{x})^{k/p}}\overline{x}^{2k/p}$$

is real-analytic on $\boldsymbol{C}P^2\setminus\{z=0\}$ if $(x\overline{x})^{k/p}$ divides $a-1$.

On $\boldsymbol{C}P^2\setminus\{y=0\}$, in the $[x:1:z]$ coordinates, the action is written as

$$[x:1:z]=\left[\frac{x}{z}:\frac{1}{z}:1\right]$$

$$\longmapsto\left[\frac{x}{z}\left(\frac{A((\frac{x}{z})^{\frac{k}{p}})}{(\frac{x}{z})^{\frac{k}{p}}}\right)^{\frac{p}{k}}\left(\frac{|A((\frac{x}{z})^{\frac{k}{p}})|}{|\frac{x}{z}|^{\frac{k}{p}}}\right)^{-\frac{p}{k}}:\ \frac{1}{z}\left(\frac{A((\frac{x}{z})^{\frac{k}{p}})}{(\frac{x}{z})^{\frac{k}{p}}}\right)^{\frac{q}{k}}\left(\frac{|A((\frac{x}{z})^{\frac{k}{p}})|}{|\frac{x}{z}|^{\frac{k}{p}}}\right)^{-\frac{q}{k}}:\ 1\right]$$

$$=\left[x\left(\frac{A((\frac{x}{z})^{\frac{k}{p}})}{(\frac{x}{z})^{\frac{k}{p}}}\right)^{\frac{p-q}{k}}\left(\frac{|A((\frac{x}{z})^{\frac{k}{p}})|}{|\frac{x}{z}|^{\frac{k}{p}}}\right)^{-\frac{p-q}{k}}:1:z\left(\frac{A((\frac{x}{z})^{\frac{k}{p}})}{(\frac{x}{z})^{\frac{k}{p}}}\right)^{-\frac{q}{k}}\left(\frac{|A((\frac{x}{z})^{\frac{k}{p}})|}{|\frac{x}{z}|^{\frac{k}{p}}}\right)^{\frac{q}{k}}\right].$$

Here

$$\frac{A((x/z)^{k/p})}{(x/z)^{k/p}}=\frac{A(((x\overline{z})/(z\overline{z}))^{k/p})}{((x\overline{z})/(z\overline{z}))^{k/p}}=\frac{A((x\overline{z})^{k/p})}{(x\overline{z})^{k/p}}\\ =\frac{1}{2}(a+\frac{1}{a})+\frac{1}{2}\frac{a+1}{a}\frac{a-1}{(x\overline{x})^{k/p}(z\overline{z})^{k/p}}(z\overline{x})^{2k/p}\,.$$

Hence if $(x\overline{x})^{k/p}(z\overline{z})^{k/p}$ divides $a-1$, then A extends real-analytically on $\{x=0\}\cup\{z=0\}$, that is, A is real-analytic on $\boldsymbol{C}P^2\setminus\{y=0\}$.

On $\boldsymbol{C}P^2\setminus\{x=0\}$, in the coordinates $[1:y:z]$, the action of A is written as

$$\begin{aligned}
&[1:y:z]=\Big[\frac{1}{z}:\frac{y}{z}:1\Big]\\
\longmapsto\ &\Big[\frac{1}{z}\Big(\frac{A((\frac{1}{z})^{\frac{k}{p}})}{(\frac{1}{z})^{\frac{k}{p}}}\Big)^{\frac{p}{k}}\Big(\frac{|A((\frac{1}{z})^{\frac{k}{p}})|}{|\frac{1}{z}|^{\frac{k}{p}}}\Big)^{-\frac{p}{k}}\ :\ \frac{y}{z}\Big(\frac{A((\frac{1}{z})^{\frac{k}{p}})}{(\frac{1}{z})^{\frac{k}{p}}}\Big)^{\frac{q}{k}}\Big(\frac{|A((\frac{1}{z})^{\frac{k}{p}})|}{|\frac{1}{z}|^{\frac{k}{p}}}\Big)^{-\frac{q}{k}}\ :\ 1\Big]\\
=&\Big[1:y\Big(\frac{A((\frac{1}{z})^{\frac{k}{p}})}{(\frac{1}{z})^{\frac{k}{p}}}\Big)^{-\frac{p-q}{k}}\Big(\frac{|A((\frac{1}{z})^{\frac{k}{p}})|}{|\frac{1}{z}|^{\frac{k}{p}}}\Big)^{\frac{p-q}{k}}\ :\ z\Big(\frac{A((\frac{1}{z})^{\frac{k}{p}})}{(\frac{1}{z})^{\frac{k}{p}}}\Big)^{-\frac{p}{k}}\Big(\frac{|A((\frac{1}{z})^{\frac{k}{p}})|}{|\frac{1}{z}|^{\frac{k}{p}}}\Big)^{\frac{p}{k}}\Big].
\end{aligned}$$

Here,

$$\begin{aligned}
\frac{A((1/z)^{k/p})}{(1/z)^{k/p}}&=\frac{A((\overline{z}/(z\overline{z}))^{k/p})}{(\overline{z}/(z\overline{z}))^{k/p}}=\frac{A((\overline{z})^{k/p})}{(\overline{z})^{k/p}}\\
&=\frac{1}{2}(a+\frac{1}{a})+\frac{1}{2}\frac{a+1}{a}\frac{a-1}{(z\overline{z})^{k/p}}z^{2k/p}\,.
\end{aligned}$$

Hence if $(z\overline{z})^{k/p}$ divides $a-1$, then the action of A extends real-analytically on $\{z=0\}$, that is A is real analytic on $\boldsymbol{C}P^2\setminus\{x=0\}$.

Summing these up, if $(x\overline{x})^{k/p}(z\overline{z})^{k/p}$ divides $a-1$, then A is real-analytic on the whole $\boldsymbol{C}P^2$.

Put $P=\dfrac{(x\overline{x})^{k/p}(z\overline{z})^{k/p}}{(|x|^2+|y|^2+|z|^2)^{k/p}}=\dfrac{(x\overline{x})^{q(p-q)}(z\overline{z})^{q(p-q)}}{(|x|^2+|y|^2+|z|^2)^{q(p-q)}}$ and $a=1+P$. By Proposition 5.1, if the rotation angle θ along the orbit is divisible by P^2, an orbitwise rotation near the identity can be written as a product of 2 commutators of orbit preserving real-analytic diffeomorphisms.

Thus using the $U(1)$ action with 3 fixed points, we showed that $\mathrm{Diff}^\omega(\boldsymbol{C}P^2)_0$ is a perfect group.

謝辞

本研究の一部は武蔵野大学研究費、科学研究費補助金 18654008, 20244003, 24224002, 学術研究助成基金助成金 21K18580 の助成によっており、これに感謝します。この結果の一部は、2015 年 ENS Lyon において講演しています。ENS Lyon のメンバーに感謝します。

参考文献

[1] A. Banyaga, The structure of classical diffeomorphism groups, Mathematics and itsApplications 400, Kluwer Academic Publishers Group, 1997.

[2] M.-R. Herman, Sur le groupe des difféomorphismes R-analytiques du tore, *Differential topology and geometry (Proc. Colloq., Dijon, 1974), Springer Lecture Notes in Math.* 484, 1975, 36 -– 42.

[3] R. Fintushel, Circle actions on simply connected 4-Manifolds *Transactions of Amer. Math. Soc.* 230 (1977), 147–171.

[4] R. Fintushel, Classification of circle actions on 4-Manifolds *Transactions of Amer. Math. Soc.* 242 (1978), 377–390.

[5] W. Thurston, Foliations and groups of diffeomorphisms, *Bull. Amer. Math. Soc.* 80 (1974), 304–307.

[6] T. Tsuboi, On the group of real analytic diffeomorphisms, *Ann. Scient. Éc. Norm. Sup.* 4$^{\mathrm{e}}$ série, 42, (2009), 601 – 651.

(原稿提出: 2022 年 12 月 18 日)