

A Proposal of Educational Toy "SUZY's" and Its Mathematical Structure

メタデータ	言語: jpn 出版者: 公開日: 2023-03-14 キーワード (Ja): キーワード (En): 作成者: 荒岡, 葵, 神谷, 亮 メールアドレス: 所属:
URL	https://mu.repo.nii.ac.jp/records/1976

知育玩具 SUZY's の提案とその数理構造

A Proposal of Educational Toy "SUZY's" and Its Mathematical Structure

荒岡 葵¹

Aoi Araoka

神谷 亮²

Ryo Kamiya

概要

計算能力や計算の結果が一致するかを判断する能力を養うことが期待される知育玩具 SUZY's を提案する。SUZY's は計算式がいくつか書かれたカード複数枚からなる玩具であり、そのカードセットの構成には組み合わせ理論などで研究されているブロックデザインの特別な場合と対応する非自明性があることを示す。SUZY's のブロックデザインを利用した構成法を紹介し、SUZY's の教育的側面に関する考察を行う。

1 はじめに

学習の質を高めることは学習者本人や教師にとって重要な課題である。学力や学習意欲の向上を促すために、教育機関での授業や社員研修など、様々な教育の現場においてゲームを用いた試みがなされている [1, 2, 3]。ゲームを用いた学習に関する試みの内容は様々であるが、日常生活や算数・数学の学習、及び数学の様々な応用をする上で重要な能力である計算能力を向上するためのゲームもいくつか考案されている [4, 5]。それらのいくつかで、重要な計算の反復、自己評価、戦略の利用によって、学習意欲の向上や計算能力の向上について一定の効果が得られている。

計算の学習への目的に限らなければ実に様々なゲームがこれまで考案されてきたが、その中には数学的背景を持つものも存在する。例えば、石取りゲームは、数学的からくりを理解することにより必勝法を得ることができるゲームとして知られ、教材化した例もある [6]。また、組み合わせ論と関係するゲームとして、Dobble [7] が知られている。Dobble は各 8 つの絵が書かれた 55 枚のカードからなる玩具であり、その相異なる任意の 2 枚のカードに対して共通して描かれた絵柄が唯一つ存在する、という性質をもつ。この Dobble が持つ性質を組み合わせ論などで研究されているブロックデザインを用いて一般化して、類似の組み合わせ論的背景を持つゲームを考案した研究も存在する [8]。

本稿では、Dobble と同様の組み合わせ論的な数学的背景を持つゲームであって、さらに計算能力や計算の結果が一致するかを判断する能力を養うことが期待される新しい知育玩具

¹ 武蔵野大学数理工学科 3 年

² 武蔵野大学数理工学センター特任研究員 / 武蔵野大学非常勤講師

SUZY's を提案する. SUZY's の原型は, 著者の一人, 荒岡葵が武蔵野大学工学部数理工学科の科目「プロジェクト 1」で考案した玩具である. 本稿ではその玩具を一般化したものを提案する.

本稿の構成は以下の通りである. 第 2 節では, 提案する知育玩具 SUZY's がどのようなものか, その仕様を述べ, 遊び方を例示する. 第 3 節では, ブロックデザインの定義とその理論の結果の一部を紹介したうえで SUZY's との関係性を述べ, その上で, 既知のブロックデザインを用いて SUZY's を構成する方法を詳細に示す. 第 4 節で SUZY's を利用して学習する際に期待される教育的効果と研究の展望を述べる.

2 知育玩具 SUZY's の提案

この節では, 提案する知育玩具 SUZY's がどのようなものかを述べ, 遊び方を例示する.

2.1 提案する知育玩具 SUZY's の定義

定義 1 (SUZY's).

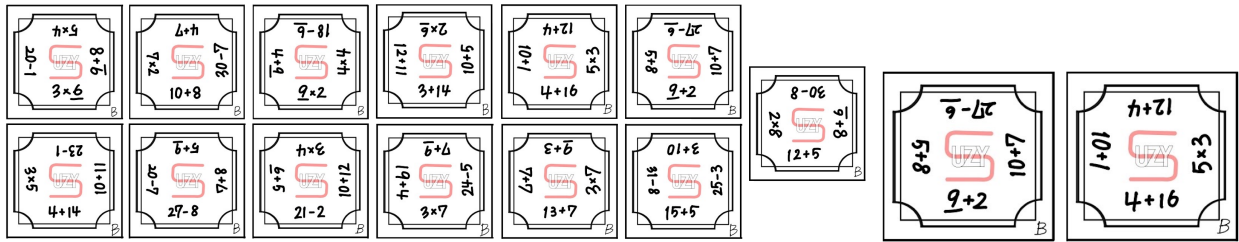
c, s, n, m を正の整数とする. 計算式が n 個書かれたカード c 枚からなるカードセットを考える. このカードセット内の各カードに対し, その n 個の計算式が表す値 (以下, 計算結果ともよぶ) は互いに異なるものとする. つまり, 各カードに対し, n 個の相異なる値が対応しているとする. また, カードセット内のカードの計算式が表す値は s 種類であるとする. さらにこのカードセットが以下の条件を満たすとき, そのようなカードセットを (c, s, n, m) をパラメータとする SUZY's と呼ぶ.

条件 1 (カードセットの満たすべき条件).

1. 任意の相異なる 2 枚のカードにおいて同じ計算結果になる計算式が 1 組だけ存在する
2. カードセット内のカードに書かれた計算式の表す各値に対し, その値を計算結果をもつカードセット内のカードの枚数は一定 (m 枚) である

図 1a は, $(c, s, n, m) = (13, 13, 4, 4)$ をパラメータとする SUZY's の例である. 例えば, 図 1a に含まれる 2 枚のカード (図 1b) において, 左のカードの計算式 $9 + 2$ と右のカードの計算式 $10 + 1$ の計算結果は共に 11 である. この SUZY's のカードセットは $13 (= c)$ 枚のカードからなり, 各カードには $4 (= n)$ 個の計算式が書かれていて, 11 以上 23 以下の整数である $13 (= s)$ 種類の値がそれぞれ $4 (= m)$ 回, 計算結果として現れている.

より具体的な遊び方は次節で述べるが, 最も基本的な遊び方は, カードセット内からランダムに出された 2 枚のカードに対して, 共通する計算結果をできる限り早く見つけ宣言する, という 1 人でも可能な遊び方である. なお, 1 枚のカードに書かれた計算式の個数 n が大きいほど SUZY's で遊ぶ際の難度が上がる. 条件 1-1 は, このような遊びを実際に行えるための条件であり, 条件 1-2 は, 答えるべき値に確率的な偏りはないという条件である.



(a) $(c, s, n, m) = (13, 13, 4, 4)$ をパラメータとする SUZY's の例

(b) 2 枚のカード

図 1: SUZY's の例

2.2 遊び方

この小節では SUZY's のカードを使った対戦型の遊び方を例示する。

例 1.

1. 親 (カードを出していく人) を決める
2. 親が全てのカードを裏返しにして山札をつくり, 山札から 1 枚目のカードを表向きにして場に出す. このカードを固定札とする
3. 親が山札から一枚, 固定札の隣に並べて表向きに出す. このカードを引き札とする
4. 各プレイヤー (親も含める) は, 2 枚のカードに書かれている計算式を計算してそれぞれのカードに含まれる共通する計算結果を見つけ次第その値を宣言する
5. 一番最初に数字を答えた人が引き札を得る
6. 3~5 の手順を繰り返す
7. 親の持っているカードの束がなくなったらゲーム終了
8. 一番多くカードを持っている人を勝ちとする

例 2.

1. 1 枚を残し, 全員に同じ枚数のカードを配り, それぞれが山札を作る
2. 残した 1 枚を中央に置き, 各プレイヤーは自分の山札の一番上のカードと, 中央のカードを見比べる
3. 各プレイヤーは自分の山札の一番上のカードと中央のカードを見比べて, 共通する計算結果を見つけ次第その値を宣言する
4. 一番最初に宣言した人が, 自分のカードを中央に重ねる
5. 2~4 の手順を繰り返し, 最初に山札がなくなった人を勝ちとする

例 3.

1. カードを全員に同じ枚数配り, それぞれが山札を作り裏返しにして持つ

2. 一斉に一番上のカードを全プレイヤーに公開する.
3. 自分のカードにある計算式の計算結果を, ほかのプレイヤーのカードに見つけ次第計算結果を宣言し, そのカードの持ち主に自分のカードを押し付ける.
4. 押し付けられたカードは, 自分の山札の下にカードを重ねる.
5. 2~4 の手順を繰り返し, 最初に山札がなくなった人を勝ちとする

これらは遊び方の例であり, その他にプレイヤー同士が納得できるよう, ルールを創意工夫してもよい. 図 2 のように, カードに書かれた計算式の暗算がプレイヤーにとって困難になる場合には, 答えを叫ぶ代わりに同じ答えをもつ式を指さす (適宜, なぜ同じ答えになるか説明する) といったルールにしてもよい. また遊び方の例 1 において, 手順 5 で得るカードをどちらか選べるようにするなどのアレンジも可能である. この場合, 自分が計算結果をよく覚えている方のカードを場に残しておくなどの戦略が可能になる.

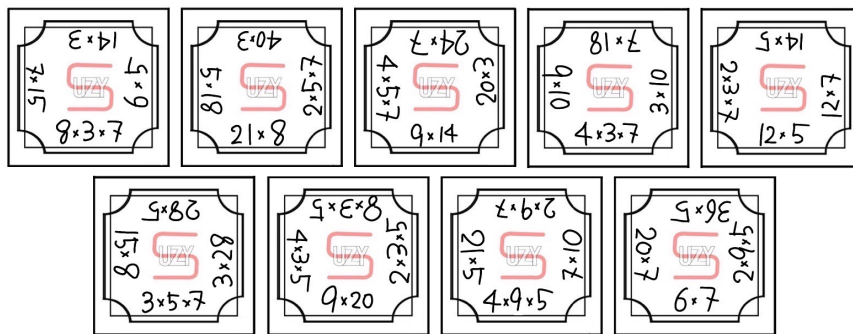


図 2: $(c, s, n, m) = (9, 12, 4, 3)$ をパラメータとする SUZY's の例

3 SUZY's の数理構造

組み合わせ論の一分野であるブロックデザインの理論と SUZY's の関係を明示し, (c, s, n, m) をパラメータとする SUZY's が存在するときに c, s, n, m が満たすべき条件を提示すること, およびブロックデザイン理論の結果を利用して SUZY's の構成法を明示するのがこの節の目的である. 前節で定義した SUZY's に対してその組み合わせ論的性質を調べる際には, どのカードとどのカードが計算結果を共有する計算式をもつかという情報のみが重要であり, 計算結果以外の具体的な計算式の形は必要ない. SUZY's に関する組み合わせ論的考察をしやすくするために, カードに書かれた具体的な計算式の形を捨象した SUZY's を定義する.

定義 2 ((c, s, n, m) -SUZY's).

c, s, n, m を正整数とする. 集合 S と S の部分集合族 $(C_i)_{i \in I}$ の組 $(S, (C_i)_{i \in I})$ であって

1. $s = |S|, c = |I|$
2. $\forall (i, j) \in I^2, i \neq j \Rightarrow |C_i \cap C_j| = 1$
3. $\forall i \in I, |C_i| = n$

$$4. \forall a \in S, |\{i \in I : a \in C_i\}| = m$$

を満たすものを (c, s, n, m) -SUZY's という。

前節で定義した (c, s, n, m) をパラメータとする SUZY's に対し, カードセットのカードに書かれた計算式の表す値全てからなる数の集合を S とし, 各カード (適当に添え字 i を割り当て, 添え字集合を I とする) に対し, そのカードに記された計算式の表す値からなる S の部分集合を C_i とすれば, $(S, (C_i)_{i \in I})$ は (c, s, n, m) -SUZY's である。

3.1 ブロックデザインと SUZY's との関係

定義 3 (ブロックデザイン).

正整数 v, b, r, k, λ が与えられているとする. v 元集合 X の元を点と呼び, X の k 個の元からなる部分集合をブロックと呼ぶ. ブロックの集合 \mathfrak{B} が b 元集合であり, さらに次の 2 条件を満たすとき, 組 (X, \mathfrak{B}) を (v, b, r, k, λ) をパラメータ値とするブロックデザイン (2-デザイン) と呼ぶ。

- 任意の点 x に対し, x を含む \mathfrak{B} はちょうど r 個である.
- 任意の異なる 2 点 x, y に対し, x と y を共に含む \mathfrak{B} の元はちょうど λ 個である.

ブロックデザインについて, 知られているいくつかの結果を述べる。

命題 1 ([9]10 章). (v, b, r, k, λ) をパラメータ値とするブロックデザインが存在するとき, 以下が成立する。

$$bk = vr \tag{1}$$

$$r(k-1) = \lambda(v-1) \tag{2}$$

$$b \geq v \tag{3}$$

$$r \geq k \tag{4}$$

命題 2 ([9, 10]). (v, b, r, k, λ) をパラメータ値とするブロックデザインであって, $v = b$ であるものが存在するとき, $n = k - \lambda$ とおくと以下が成立する。

1. v が偶数ならば, n は平方数である.
2. v が奇数ならば, $(0, 0, 0)$ ではない整数の組 (x, y, z) が存在して,

$$z^2 = nx^2 + (-1)^{(v-1)/2} \lambda y^2.$$

この節で定義した SUZY's はパラメータ $\lambda = 1$ であるブロックデザインと双対的な操作により対応することを定理 1 に述べる. 本節で述べたブロックデザインの一般化である t -デザインに対して双対のような操作を考えることによって定義 2 の性質 2 に相当する組み合わせ論的性質をもつカードゲームが得られることは [8] にも述べられているが, 定理 1 は $t = 2$ の場合に, より詳細に対応関係を述べたものである。

定理 1.

$(v, b, r, k, 1)$ をパラメータ値とするブロックデザイン (X, \mathfrak{B}) に対し, $S := \mathfrak{B}$ とし, 各 $x \in X$ 毎に $C_x := \{B \in \mathfrak{B} \mid x \in B\}$ とすると, $(S, (C_x)_{x \in X})$ は (v, b, r, k) -SUZY's である.

一方, (c, s, n, m) -SUZY's $(S, (C_i)_{i \in I})$ に対し, $X := I$, 各 $x \in S$ に対し, $B_x = \{i \in I \mid x \in C_i\}$, $\mathfrak{B} := \{B_x \mid x \in S\}$ とすれば, (X, \mathfrak{B}) は $(c, s, n, m, 1)$ をパラメータ値とするブロックデザインである.

定理 1 により, (c, s, n, m) -SUZY's が存在することと, $(v, b, r, k, 1)$ をパラメータ値とするブロックデザインが存在することは同値である. 従って, 命題 1, 命題 2 により, SUZY's のパラメータ (n, m, c, s) には以下に述べる制約が存在する事がわかる.

定理 2. (c, s, n, m) -SUZY's $(S, (C_i)_{i \in I})$ が存在するとき, 次が成立する.

$$nc = ms \tag{5}$$

$$sm(m - 1) = c(c - 1) \tag{6}$$

$$s \geq c \tag{7}$$

$$n \geq m \tag{8}$$

定理 3. (c, s, n, m) -SUZY's $(S, (C_i)_{i \in I})$ であって $c = s$ なるものが存在するとき, 次が成立する.

1. c が偶数ならば, $m - 1$ は平方数である.
2. c が奇数ならば, $(0, 0, 0)$ ではない整数の組 (x, y, z) が存在して,

$$z^2 = (m - 1)x^2 + (-1)^{(c-1)/2}y^2.$$

注意 1. $(v, b, r, k, 1)$ をパラメータ値とするブロックデザインであって, $v = b$ であるものは有限射影平面とよばれ, $r - 1$ の値をその位数という ([9]). 有限体 \mathbb{F}_{p^n} (p は素数, n は正整数) 上の射影平面を考えると, その直線をブロックとして位数 p^n の有限射影平面を得る. 一方, 素数のべきでない位数を持つ有限射影平面が存在するかどうかは未解決問題 (有限射影平面の基本問題) であり, 位数 12 の有限射影平面が存在するかも分かっていない ([11]). つまり, 例えば $n = m = 13$ であるような SUZY's が存在するかどうか未解決である.

3.2 SUZY's の構成例

この小節の目的は, 定理 1 に述べた, $(v, b, r, k, 1)$ をパラメータ値とするブロックデザインをもとに (v, b, r, k) -SUZY's を構成する方法を具体的な場合に詳述することで SUZY's のカードセットを実際に構成する際の助けとすることである. 表 1 に, $\lambda = 1$ のブロックデザインの例を示す.

表 1 の例 1, 例 2, 例 6 がそれぞれどのような集合をブロックとするブロックデザインかを表 2 に示す. 表 1 のその他の例も同様である.

例	v	b	r	k	λ	ブロックデザインの例
1	7	7	3	3	1	1,2,4 mod 7
2	9	12	4	3	1	EG(2,3)
3	13	13	4	3	1	0,1,3,9 mod 13
4	16	20	5	4	1	EG(2,4)
5	21	21	5	5	1	3,6,7,12,14 mod 21
6	13	26	6	3	1	[1,3,9];[2,5,6] mod 13
7	25	30	6	5	1	EG(2,5)
8	31	31	6	6	1	1,5,11,24,25,27 mod 31

表 1: $\lambda = 1$ のブロックデザインの例 ([9] の p.406 の一部を引用)

例	ブロック
1	7 を法とした $\{1,2,4\}, \{1+1.2+1.4+1\}, \dots, \{1+6,2+6,4+6\}$ つまり, $\{1,2,4\}, \{2,3,5\}, \dots, \{0,1,3\}$
2	3 元体上の 2 次元平面 \mathbb{F}_3^2 上の直線
6	13 を法とした $\{1,3,9\}, \{1+1.3+1.9+1\}, \dots, \{1+12,3+12,9+12\},$ $\{2,5,6\}, \{2+1.5+1.6+1\}, \dots, \{2+12,5+12,6+12\}$

表 2: 例 1, 例 2, 例 6 の詳細

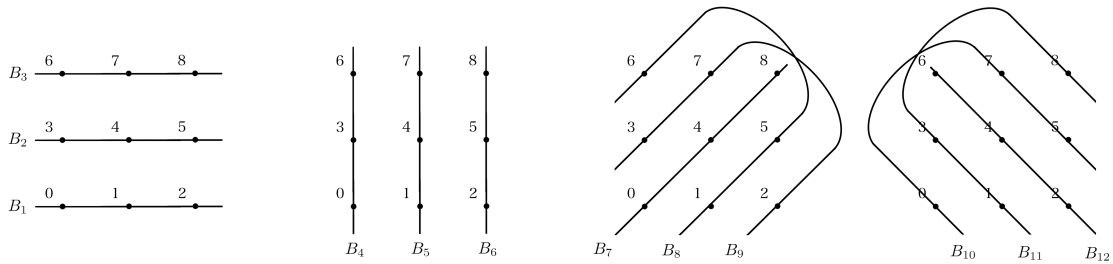


図 3: \mathbb{F}_3 上の平面 \mathbb{F}_3^2 の 12 本の直線

ここで, 表 1 の例 2 のブロックデザインを例に, SUZY's のカードセットを構成する方法を説明する.

\mathbb{F}_3 上の平面 \mathbb{F}_3^2 の直線は, 図 3 に表した 12 本である. 但し, 表記の簡単のため, \mathbb{F}_3^2 の点 (i, j) ($i, j \in \{0, 1, 2\}$) を 1 つの数 $i + 3j$ で表している.

つまり, 12 個のブロック B_1, \dots, B_{12} は集合としては次のようになる.

$$\begin{aligned}
 B_1 &= \{0, 1, 2\}, & B_2 &= \{3, 4, 5\}, & B_3 &= \{6, 7, 8\}, & B_4 &= \{0, 3, 6\}, \\
 B_5 &= \{1, 4, 7\}, & B_6 &= \{2, 5, 8\}, & B_7 &= \{0, 4, 8\}, & B_8 &= \{1, 5, 6\}, \\
 B_9 &= \{2, 3, 7\}, & B_{10} &= \{0, 5, 7\}, & B_{11} &= \{1, 3, 8\}, & B_{12} &= \{2, 4, 6\}.
 \end{aligned}$$

この $(9, 12, 4, 3, 1)$ をパラメータ値とするブロックデザインに対し、定理 1 に述べた方法で $(9, 12, 4, 3)$ -SUZY's を構成すると、カードに対応する集合 C_1, \dots, C_9 は次のようになる。

$$\begin{aligned}
 C_1 &= \{B_1, B_4, B_7, B_{10}\}, & C_2 &= \{B_1, B_5, B_8, B_{11}\}, & C_3 &= \{B_1, B_6, B_9, B_{12}\}, \\
 C_4 &= \{B_2, B_4, B_9, B_{11}\}, & C_5 &= \{B_2, B_5, B_7, B_{12}\}, & C_6 &= \{B_2, B_6, B_8, B_{10}\}, \\
 C_7 &= \{B_3, B_4, B_8, B_{12}\}, & C_8 &= \{B_3, B_5, B_9, B_{10}\}, & C_9 &= \{B_3, B_6, B_7, B_{11}\}.
 \end{aligned}$$

この情報をカードに表したものを図 4 に示す。

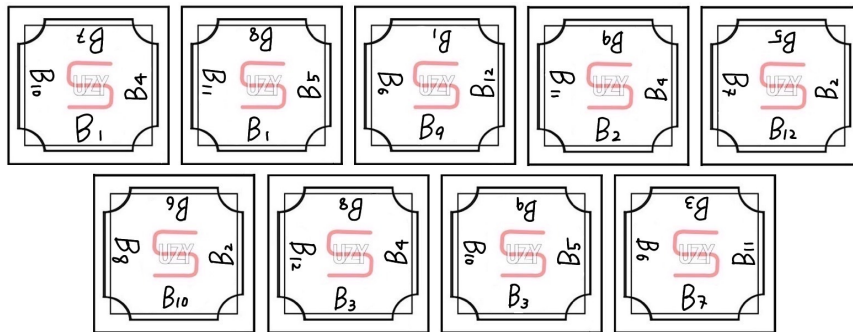


図 4: ブロックを割り当てたカード

このカードに書かれたブロック B_1 から B_{12} までに対し、異なる 12 個の数を割り当てる。例えば、 $B_1 \rightarrow 168, B_2 \rightarrow 84, B_3 \rightarrow 180, B_4 \rightarrow 30, B_5 \rightarrow 70, B_6 \rightarrow 140, B_7 \rightarrow 42, B_8 \rightarrow 120, B_9 \rightarrow 126, B_{10} \rightarrow 105, B_{11} \rightarrow 90, B_{12} \rightarrow 60$ と割り当てる。最後に、各カードに対し、書かれた各ブロックに割り当てられた数を答えとする数式を書き込んだカードを作ると、例えば図 2 の SUZY's を得る。

4 おわりに

本稿では、計算能力や計算の結果が一致するかを判断する能力を養うことが期待される知育玩具として SUZY's を提案し、そのブロックデザインとの関係を通して SUZY's のとるパラメータに関する必要条件を導き、SUZY's の構成法を述べた。SUZY's は 1 人でも遊べる知育玩具であり、計算能力にある程度の差がある 2 人以上で対戦する場合でも、遊び方と運次第で良い勝負となる可能性が十分にあるゲームとなる。その影響で計算練習に対する嫌悪感をあま

り感じることなくゲームに熱中することができ、自然に計算の回数が増えて計算能力の向上に結びつくことが期待される。しかし、SUZY's で遊ぶことで実際に計算能力や計算結果が一致するかどうかを判定する能力が向上するかどうか、他の計算に関わるいくつかのゲーム ([4, 5]) のような学習意欲への影響があるかどうかの検証はまだなされていない。そのような検証をすることは今後の重要な課題である。

また、SUZY's には組み合わせ論に関係する数学的な背景がある。SUZY's で遊んだり、例えば図 4 をもとに SUZY's を作ろうとしたりする中で、SUZY's の組み合わせ論的非自明性に気付くこともあり得る。その際に教師が適切に指導することができれば、注意 1 に述べたような未解決問題に関連する、より高度な数学への学習・研究へとつながるかもしれない。なお、PC 等でのデジタルゲームで画面上で SUZY's を遊ぶ場合には、組み合わせ論的な非自明性に気が付くのはより難しくなると思われる。したがって、SUZY's の組み合わせ論的側面への気付きとその派生効果を教育的効果として期待する場合、実際のカードセットを利用したゲームをすることが望ましい。

本稿が、学力や学習意欲を向上させる授業や学習教材を検討する際の一助となれば幸いである。

5 謝辞

本研究を遂行するにあたり、SUZY's のもつ性質や具体例に関して議論していただいた武蔵野大学工学部数理工学科の時弘哲治特任教授に感謝いたします。また、武蔵野大学工学部数理工学科 3 年生の土地奏楽さん、筒井葵さん、松岡愛奈さんは、武蔵野大学工学部数理工学科の科目「プロジェクト 1」にて、SUZY's のカードのデザインやテストプレイによる難易度の調整などにご協力いただきました。ありがとうございます。

参考文献

- [1] 有田隆也. ドイツボードゲームの教育利用の試み—考える喜びを知り生きる力に結びつける—. コンピュータ & エデュケーション, 2011, 31: 34-39.
- [2] 廣瀬司, et al. 情報セキュリティ教育のためのカードゲームの検証. 研究報告ソフトウェア工学 (SE), 2018, 2018.21: 1-7.
- [3] 大藪千穂, 奥田 真之, 地域金融機関との連携による金融経済教育の開発と実践—「人生設計ゲーム」の教育効果と地域貢献— 共同研究助成論文 43 巻 (2016) pp.53-63
- [4] 栃木公平, et al. 計算力の向上を目的としたパズル型学習ソフトウェアの開発と評価: 10 のまとまりに着目した基本計算のトレーニング. 宇都宮大学教育学部教育実践総合センター紀要, 2007, 30: 57-66.
- [5] 畠秀史; 須藤幸子. “ゲーム学習” の導入による新しい算数学習の創造 掛け算九九の学習への導入に焦点をあてて. 日本数学教育学会誌, 1994, 76.8: 24.

- [6] 植野義明, et al. 石取りゲームの教材化. 東京工芸大学工学部紀要, 2008, 31.1: 98.
- [7] doobblegame.com, ASMODEE GROUP,
URL:<https://www.dobblegame.com/en/homepage/>
- [8] Burkard Polster. The intersection game. *Math Horizons*, 2015, 22.4: 8-11.
- [9] M. Hall. 1998. *Combinatorial Theory* 2nd ed. ed.). Wiley Classics Library, Wiley.
- [10] Ryser, H. J. “Matrices with Integer Elements in Combinatorial Investigations.” *American Journal of Mathematics*, vol. 74, no. 4, 1952, pp. 769–73.
- [11] Matolcsi, M., Weiner, M. Finite Projective Planes and the Delsarte LP-Bound. *Anal Math* 44, 89–98 (2018).

(原稿提出: 2023 年 1 月 9 日; 修正稿提出: 2023 年 1 月 24 日)