

1次元Fix-Caginalp方程式の大域的解構造に関する数 値的結果

メタデータ	言語: Japanese 出版者: 公開日: 2022-02-07 キーワード (Ja): キーワード (En): 作成者: 森, 竜樹 メールアドレス: 所属:
URL	https://mu.repo.nii.ac.jp/records/1668

1 次元 Fix-Caginalp 方程式の大域的解構造に関する数値的結果

Numerical results for the global structure of stationary solutions for the 1-dimension Fix-Caginalp equation

森 竜 樹¹

Tatsuki Mori

1 はじめに

次の反応拡散系

$$\begin{cases} \tau \varphi_t = \xi^2 \Delta \varphi + \varphi - \varphi^3 + 2u & \text{in } \Omega \times (0, T), \end{cases} \quad (1.1)$$

$$\begin{cases} u_t + \frac{\ell}{2} \varphi_t = \kappa \Delta u & \text{in } \Omega \times (0, T), \end{cases} \quad (1.2)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} = \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 & \text{on } \partial \Omega \times (0, T), \end{cases} \quad (1.3)$$

$$\begin{cases} \varphi(x, 0) = \varphi_0(x), u(x, 0) = u_0(x) & \text{in } \Omega \end{cases} \quad (1.4)$$

に興味をもっている．ここで、 $\varphi = \varphi(x, t)$, $u = u(x, t)$ は未知関数、 τ, ξ, ℓ, κ は正定数、 $\Omega \subset \mathbb{R}^n (n = 1, 2, 3)$ は滑らかな境界 $\partial \Omega$ をもつ有界領域、 ν は $\partial \Omega$ 上の外向き単位法線ベクトルである．このモデルはノイマン境界条件付き Fix-Caginalp 方程式と呼ばれ、非等温な固体と液体に関する相転移現象に関する数理モデルである．Fix[3] はモデルの提案と数値計算を行い、Caginalp[1] は時間大域解についての結果を得た．

物理的には、 $\varphi(x, t)$ はある場所、時刻での相を表しており、 $\varphi = 1$ では液体、 $\varphi = -1$ では固体を表す． $u(x, t)$ はある場所、時刻での相対温度で、 τ, ξ, ℓ, κ はそれぞれ、時定数、液体の拡散係数、潜熱、熱伝導率を表している．

(1.2), (1.3) より、総エンタルピー保存則、

$$\frac{d}{dt} \left\{ \int_{\Omega} \left(u(x, t) + \frac{\ell}{2} \varphi(x, t) \right) dx \right\} = 0$$

が成り立つ．総エンタルピーを m とすると、保存則より

$$\int_{\Omega} u(x, t) dx + \frac{\ell}{2} \int_{\Omega} \varphi(x, t) dx \equiv \int_{\Omega} u_0(x) dx + \frac{\ell}{2} \int_{\Omega} \varphi_0(x) dx = m \quad (1.5)$$

が成り立つ．

定常状態では、 $\varphi_t \equiv 0$, $u_t \equiv 0$ となる．さらに、(1.2), (1.3) より、 u は定数となる．この定数を $\bar{u}$ とおく．また、簡単化のために、 $d := \xi^2$ とおく．

¹ 武蔵野大学数理工学センター員 / 武蔵野大学工学部数理工学科助教

d, ℓ は正定数, m は実定数であり, 定常問題は, $\varphi = \varphi(x)$ を未知関数, $\bar{u}$ を未知定数とする

$$(SP; \Omega) \begin{cases} d\Delta\varphi + \varphi - \varphi^3 + 2\bar{u} = 0 & \text{in } \Omega, \end{cases} \quad (1.6)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial\varphi}{\partial\nu} = 0 & \text{on } \partial\Omega, \end{cases} \quad (1.7)$$

$$\begin{cases} \bar{u}|\Omega| + \frac{\ell}{2} \int_{\Omega} \varphi(x) dx = m \end{cases} \quad (1.8)$$

となる.

定常問題 $(SP; \Omega)$ の既知の結果について述べる. Elliott and Zheng [2] と Suzuki and Tasaki [4] は定数解の多重度, ℓ, m に特別な制限を課した状況での非定数定常解の存在・非存在について, 次のような結果を得ている.

Theorem A (Elliott and Zheng [2, Theorem 3.3]).

$(SP; \Omega)$ の定数解について, 次が成り立つ.

(i) $\ell \geq 1$ ならば, 任意の $m \in \mathbb{R}$ に対して, 定数解がただ一つ存在する.

(ii) $0 < \ell < 1$ かつ

(ii-1) $|m| > \frac{\sqrt{3}|\Omega|}{9}(1 - \ell)^{3/2}$ ならば, 定数解がただ一つ存在する.

(ii-2) $|m| = \frac{\sqrt{3}|\Omega|}{9}(1 - \ell)^{3/2}$ ならば, 定数解は 2 つ存在する.

(ii-3) $|m| < \frac{\sqrt{3}|\Omega|}{9}(1 - \ell)^{3/2}$ ならば, 定数解は 3 つ存在する.

Theorem B (Elliott and Zheng [2, Theorem 3.4], Suzuki and Tasaki [4, Theorem 2]).

$\ell > 0$ とする. $(SP; \Omega)$ の非定数解について, 次が成り立つ.

(i) $|m| \geq \frac{\sqrt{3}|\Omega|}{9}(1 + 3\ell)$ ならば, 非定数解は存在しない.

(ii) $d \geq 1/\mu_2^*$ ならば, 非定数解は存在しない.

(iii) $d < 1/\mu_2^*$ かつ $|m| < \frac{\sqrt{3}|\Omega|}{9} \sqrt{1 - d\mu_2^*} \left(\frac{3}{2}\ell - \frac{1}{2}d\mu_2^* - 1 \right)$ ならば, 非定数解が存在する.

ただし, μ_2^* は $-\Delta$ のノイマン境界条件下での 2 番目の固有値である.

[4] では, さらに, 空間 1 次元で $\Omega := (0, 1)$ のときに, k モードの非定数解の存在・非存在について解析をしている. なお, k モード ($k = 1, 2, \dots$) の非定数解とは, $k = 1$ に対しては, $x \in \Omega$ で単調で, $k = 2, 3, \dots$ に対しては, $x \in (0, 1/k)$ を 1 周期として $k - 1$ 回だけ解を折り返して得られる解のことである.

Theorem C (Suzuki and Tasaki [5, Theorem 4]).

$n = 1$, $\Omega := (0, 1)$ とする. $(SP; \Omega)$ の k モード解について, 次が成り立つ.

(i) $d \geq 1/(k\pi)^2$ ならば, k モードの非定数解は存在しない.

(ii) $d < 1/(k\pi)^2$ かつ $|m| < \frac{\sqrt{3}}{9} \sqrt{1 - dk^2\pi^2} \left| \frac{3}{2}\ell - \frac{1}{2}dk^2\pi^2 - 1 \right|$ ならば, 定数解から分岐する k モードの非定数解が存在する.

上で述べたように, $(SP; \Omega)$ の解の存在・非存在に関して, 1 次元の場合に絞っても部分的にしか知られていない. あまり解析が進んでいない 1 つの理由は, $(SP; \Omega)$ が積分制約条件を含む非局所的な問題で, この種の問題の解析するための道具が整備されておらず, 解の大域的構造は

手探りで調べざるを得ない状況だからである．したがって，まず，空間 1 次元で $\Omega := (0, 1)$ の場合， $(\text{SP}; (0, 1))$ のすべての定常解の大域的構造を明らかにすることは興味深い問題である．

ここでは，

問題： $\ell > 0$, $m \in \mathbb{R}$ ごとに， $(\text{SP}; (0, 1))$ の解が存在するような $(\bar{u}, d)$ をすべて求めよ．
について考えていく．

本稿では $(\text{SP}; (0, 1))$ の解の大域的構造を解析するための準備として，解の大域的構造に関する数値計算を行った結果を報告する．なお，本結果は田崎創平 (北海道大学)，辻川亨氏 (宮崎大学*/明治大学)，四ツ谷晶二氏 (龍谷大学*) との共同研究に基づくものである．

2 準備

$(\text{SP}; (0, 1))$ において，単調増加な解に注目した問題を

$$\begin{cases} d\varphi_{xx} + \varphi - \varphi^3 + 2\bar{u} = 0 & \text{in } (0, 1), \\ \varphi_x(0) = \varphi_x(1) = 0, \\ \varphi_x(x) > 0 & \text{in } (0, 1), \\ \bar{u} + \frac{\ell}{2} \int_0^1 \varphi(x) dx = m \end{cases} \quad \begin{matrix} (2.1) \\ (2.2) \\ (2.3) \\ (2.4) \end{matrix}$$

とする． (SP) の解は， $(\text{SP}; (0, 1))$ の単調増加な 1 モード解に対応する．ゆえに， $(\text{SP}; (0, 1))$ のすべての解は， (SP) の解の x についてのスケーリングや折り返して得ることができる．

まず， (SP) の解の大域的構造を調べる．

(SP) を調べるために， $\bar{u}, d$ を正定数とし， φ を未知関数とする，次の補助的な非線形境界値問題

$$\begin{cases} d\varphi_{xx} + \varphi - \varphi^3 + 2\bar{u} = 0 & \text{in } (0, 1), \\ \varphi_x(0) = \varphi_x(1) = 0, \\ \varphi_x(x) > 0 & \text{in } (0, 1) \end{cases} \quad \begin{matrix} (2.5) \\ (2.6) \\ (2.7) \end{matrix}$$

を導入する． (AP) の解で積分制約条件 (2.4) を満たすものが (SP) の解である．したがって， (AP) の解構造を確認する．

さて，J.Smoller and A.Wasserman [5] により， (AP) の解が存在するための必要十分条件は次のようになっている．

Proposition A. (AP) の解が存在するための必要十分条件は $(\bar{u}, d) \in \mathcal{G}$ である．ただし，

$$\mathcal{G} := \left\{ (\bar{u}, d) : |\bar{u}| < \frac{\sqrt{3}}{9}, 0 < d < \frac{1 - 3\beta(\bar{u})^2}{\pi^2} \right\}. \quad (2.8)$$

ここで， $\beta(\bar{u})$ は $\varphi - \varphi^3 + 2\bar{u} = 0$ の異なる 3 実根のうちで真ん中のものである．

さらに，解は一意的である．その解 $\varphi(x; \bar{u}, d)$ は次の性質を持つ．

$$-1 < \varphi(x; \bar{u}, d) < 1, \quad (2.9)$$

$$\varphi(x; -\bar{u}, d) = -\varphi(1 - x; \bar{u}, d). \quad (2.10)$$

$|\bar{u}| < \sqrt{3}/9$ のとき, $\varphi - \varphi^3 + 2\bar{u} = 0$ は異なる 3 実根を持つ. その根をそれぞれ小さい順に $\alpha(\bar{u}), \beta(\bar{u}), \gamma(\bar{u})$ とかく. すなわち, $\alpha(\bar{u}) < \beta(\bar{u}) < \gamma(\bar{u})$ である. このとき,

$$\alpha(\bar{u}) := -\frac{2}{\sqrt{3}} \sin \left(\frac{\pi}{3} - \frac{1}{3} \text{Arcsin}(3\sqrt{3}\bar{u}) \right), \quad (2.11)$$

$$\beta(\bar{u}) := -\frac{2}{\sqrt{3}} \sin \left(\frac{1}{3} \text{Arcsin}(3\sqrt{3}\bar{u}) \right), \quad (2.12)$$

$$\gamma(\bar{u}) := \frac{2}{\sqrt{3}} \sin \left(\frac{\pi}{3} - \frac{1}{3} \text{Arcsin}(3\sqrt{3}\bar{u}) \right) \quad (2.13)$$

である. 図 1 に領域 $\mathcal{G}$ の形状を示す. 領域 $\mathcal{G}$ は水色で塗られた領域である.

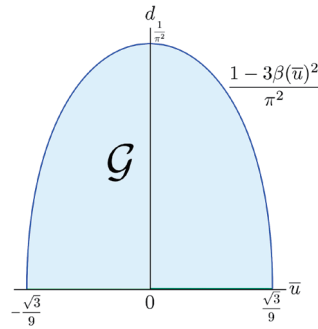


図 1 領域 $\mathcal{G}$

図 2 の左図に, $(\varphi^3 - \varphi)/2$ のグラフを示す. 曲線と高さ $\bar{u}$ で引いた水色の直線との交点の x 座標が左から $\alpha(\bar{u}), \beta(\bar{u}), \gamma(\bar{u})$ となる. 図 2 の右図に, 横軸 $\bar{u}$ とした, $\alpha(\bar{u}), \beta(\bar{u}), \gamma(\bar{u})$ のグラフを示す.

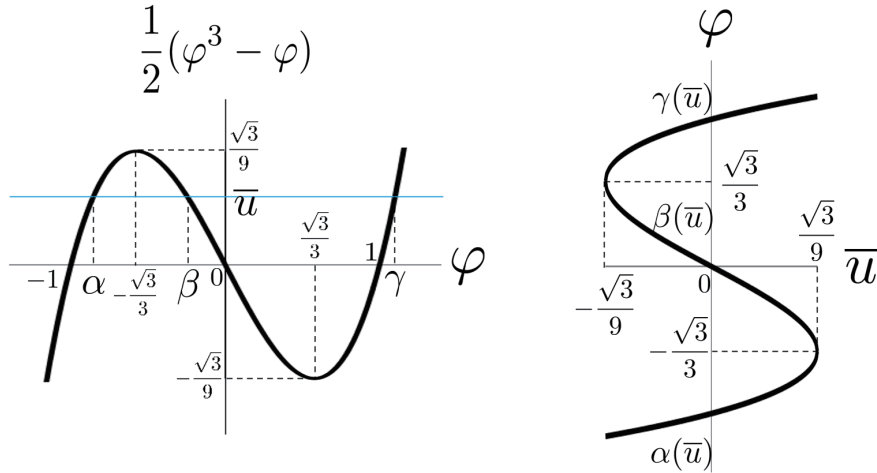


図 2 $(\varphi^3 - \varphi)/2$ のグラフと $\alpha(\bar{u}), \beta(\bar{u}), \gamma(\bar{u})$ のグラフ

(AP) において, $\bar{u}$ をとめて, d を $\mathcal{G}$ の境界に近づけたときの解 $\varphi(x; \bar{u}, d)$ の極限值は, $\alpha(\bar{u}), \beta(\bar{u}), \gamma(\bar{u})$ を用いて, 次のように表すことができる.

Lemma 2.1. $\varphi(x; \bar{u}, d)$ を (AP) の解とする. 次が成り立つ.

(i). $|\bar{u}| < \sqrt{3}/9$ とする, このとき,

$$\lim_{d \uparrow (1-3\beta(\bar{u})^2)/\pi^2} \varphi(x; \bar{u}, d) = \beta(\bar{u}). \quad (2.14)$$

(ii-1). $-\sqrt{3}/9 < \bar{u} < 0$ とする. このとき,

$$\lim_{d \downarrow 0} \varphi(x; \bar{u}, d) = \begin{cases} -\gamma(\bar{u}) + \sqrt{2 - 2\gamma(\bar{u})^2} & \text{in } x = 0, \\ \gamma(\bar{u}) & \text{in } x \in (0, 1]. \end{cases} \quad (2.15)$$

(ii-2). $\bar{u} = 0$ とする. このとき,

$$\lim_{d \downarrow 0} \varphi(x; 0, d) = \begin{cases} -1 & \text{in } x \in [0, 1/2), \\ 0 & \text{in } x = 1/2, \\ 1 & \text{in } x \in (1/2, 1]. \end{cases} \quad (2.16)$$

(ii-3). $0 < \bar{u} < \sqrt{3}/9$ とする. このとき,

$$\lim_{d \downarrow 0} \varphi(x; \bar{u}, d) = \begin{cases} \alpha(\bar{u}) & \text{in } x \in [0, 1), \\ -\alpha(\bar{u}) + \sqrt{2 - 2\alpha(\bar{u})^2} & \text{in } x = 1. \end{cases} \quad (2.17)$$

図 3 は領域 $\mathcal{G}$ 内部で $\bar{u}$ をとめて, d を $(1 - 3\beta(\bar{u})^2)/\pi^2$ から小さくするごとに, (AP) の解 $\varphi(x; \bar{u}, d)$ の形状を数値的にかいたものである. 領域 $\mathcal{G}$ の境界上の d に関しては Lemma 2.1 を用いて解を描画した.

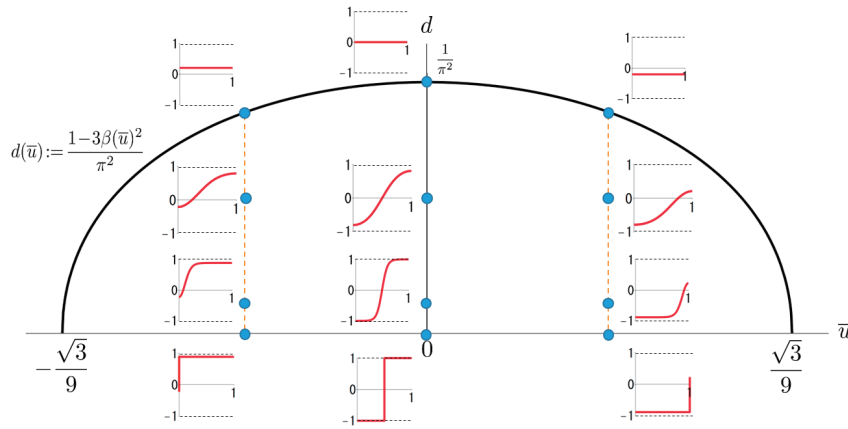


図 3 (AP) の解 $\varphi(x; \bar{u}, d)$ の形状

Proposition A より, (AP) の解全体は領域 $\mathcal{G}$ と 1 : 1 対応をつけることが出来る.

さて, (AP) の一意な解 $\varphi(x; \bar{u}, d)$ を使って,

$$\Phi(\bar{u}, d; \ell) := \bar{u} + \frac{\ell}{2} \int_0^1 \varphi(x; \bar{u}, d) dx \quad (2.18)$$

と定義する. このとき, (2.10) より, $\Phi(\bar{u}, d; \ell)$ は次の性質を持つ:

$$\Phi(-\bar{u}, d; \ell) = -\Phi(\bar{u}, d; \ell), \quad (2.19)$$

$$\Phi(0, d; \ell) = 0 \quad \text{for any } 0 < d < \frac{1}{\pi^2}. \quad (2.20)$$

各 $\ell > 0$ ごとに, $\mathcal{G}$ 上で定義される曲面 $\mathcal{S}_\ell$ を次で定義する:

$$\mathcal{S}_\ell := \{(\bar{u}, d, \Phi(\bar{u}, d; \ell)) : (\bar{u}, d) \in \mathcal{G}\}. \quad (2.21)$$

考えている問題は, 曲面 $\mathcal{S}_\ell$ の定義と積分制約条件 (2.4) から,

問題: $\ell > 0$, $m \in \mathbb{R}$ ごとに, 曲面 $\mathcal{S}_\ell$ の高さ m の等高線を求めよ.

に帰着される. したがって, $\mathcal{S}_\ell$ の性質を確認する. $\mathcal{S}_\ell$ は対称性 (2.19) より

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_\ell = & \left\{(\bar{u}, d, \Phi(\bar{u}, d; \ell)) : -\sqrt{3}/9 < \bar{u} < 0, 0 < d < (1 - 3\beta(\bar{u})^2)/\pi^2\right\} \\ & \cup \{(0, d, 0) : 0 < d < 1/\pi^2\} \\ & \cup \left\{(\bar{u}, d, \Phi(\bar{u}, d; \ell)) : 0 < \bar{u} < \sqrt{3}/9, 0 < d < (1 - 3\beta(\bar{u})^2)/\pi^2\right\} \end{aligned} \quad (2.22)$$

$$\begin{aligned} = & \left\{(-\bar{u}, d, -\Phi(\bar{u}, d; \ell)) : 0 < \bar{u} < \sqrt{3}/9, 0 < d < (1 - 3\beta(\bar{u})^2)/\pi^2\right\} \\ & \cup \{(0, d, 0) : 0 < d < 1/\pi^2\} \\ & \cup \left\{(\bar{u}, d, \Phi(\bar{u}, d; \ell)) : 0 < \bar{u} < \sqrt{3}/9, 0 < d < (1 - 3\beta(\bar{u})^2)/\pi^2\right\} \end{aligned} \quad (2.23)$$

が成り立つので, 領域 $\{(\bar{u}, d) : 0 \leq \bar{u} < \sqrt{3}/9, 0 < d < (1 - 3\beta(\bar{u})^2)/\pi^2\}$ 上での $\mathcal{S}_\ell$ の値がわかれば, これを元に変数変換をすることで, 領域 $\mathcal{G}$ 上の $\mathcal{S}_\ell$ の値を得ることができる.

さらに, 曲面 $\mathcal{S}_\ell$ の m ごとの等高線に関しては, $m > 0$ としたとき,

$$\begin{aligned} & \left\{(\bar{u}, d) : \Phi(\bar{u}, d; \ell) = m : -\sqrt{3}/9 < \bar{u} < 0, 0 < d < (1 - 3\beta(\bar{u})^2)/\pi^2\right\} \\ & = \left\{(-\bar{u}, d) : \Phi(\bar{u}, d; \ell) = -m : 0 < \bar{u} < \sqrt{3}/9, 0 < d < (1 - 3\beta(\bar{u})^2)/\pi^2\right\} \end{aligned} \quad (2.24)$$

が成り立つので, $\mathcal{S}_\ell$ の構成したあと, $m \geq 0$ で等高線形状を調べればよい.

曲面 $\mathcal{S}_\ell$ の $d \uparrow (1 - 3\beta(\bar{u})^2)/\pi^2$ と $d \downarrow 0$ での値は $\Phi(\bar{u}, d; \ell)$ の定義と Lemma 2.1 より

$$\lim_{d \uparrow (1 - 3\beta(\bar{u})^2)/\pi^2} \Phi(\bar{u}, d; \ell) := \bar{u} + \frac{\ell}{2}\beta(\bar{u}) \quad \text{for } |\bar{u}| < \frac{\sqrt{3}}{9}, \quad (2.25)$$

$$\lim_{d \downarrow 0} \Phi(\bar{u}, d; \ell) := \begin{cases} \bar{u} + \frac{\ell}{2}\gamma(\bar{u}) & \text{for } -\frac{\sqrt{3}}{9} < \bar{u} < 0, \\ \bar{u} + \frac{\ell}{2}\alpha(\bar{u}) & \text{for } 0 < \bar{u} < \frac{\sqrt{3}}{9} \end{cases} \quad (2.26)$$

$$(2.27)$$

と定義できる. ここで, $\mathcal{S}_\ell$ は原点で不連続であることに注意する. さて, 各 ℓ ごとの, 曲面 $\mathcal{S}_\ell$ の高さ m の等高線を求める素朴な数計算方法について説明する.

手順 1. $\mathcal{G}$ の内部で点 $(\bar{u}, d)$ をなるべく多くとる.

手順 2. 手順 1 でとった点 $(\bar{u}, d)$ ごとに, (AP) の解 $\varphi(x; \bar{u}, d)$ を数値的に求める.

手順 3. $\int_0^1 \varphi(x; \bar{u}, d) dx$ を数値的に計算する.

手順 4. 各 $\ell > 0$ ごとに, 曲面 $\mathcal{S}_\ell$ を数値的に構成する.

手順 5. 曲面 $\mathcal{S}$ の高さ m の等高線を描画する.

本研究で行った数値計算では手順 1 において, $\mathcal{G}$ の内部から点 $(\bar{u}, d)$ をとるところを領域 $\{(\bar{u}, d) : 0 \leq \bar{u} < \sqrt{3}/9, 0 < d < (1 - 3\beta(\bar{u})^2)/\pi^2\}$ から点をとるようにし, 必要な計算量を半減させている. なお, 点 $(\bar{u}, d)$ は約 10 万点とった. その後, 手順 2 と 3 を実行して, $(\bar{u}, d, \int_0^1 \varphi(x; \bar{u}, d) dx)$ の組のリストを作る. このリストを元に, $\ell > 0$ を止めるごとに (2.23) の数値データを生成すると同時に, 数式処理ソフト Maple の様式に整えて, 曲面 S_ℓ を描画した. 高さ m の等高線は Maple の基本的な描画コマンドを用いて描画した.

3 数値計算結果

まずは, 各 ℓ ごとの曲面 S_ℓ の形状を示す. 図 4, 5, 6 はそれぞれ, $\ell = 1, 1/2, 1/5$ のときの, 曲面 S_ℓ の概形を数値計算で描画したものである. 図中の水色の曲面が S_ℓ であり, 境界の青色の曲線は (2.25), 黄緑色の曲線は (2.26), 深緑色の曲線は (2.27) である.

これらの図から読み取れる数値的な事実を説明する. 黄緑色と深緑色の曲線では, $\bar{u}$ に関する単調性が ℓ の大きさによらず保たれているが, 青色の曲線では, $\bar{u}$ に関する増減が ℓ に応じて変化することで, 単調性が保たれていない. また, $\ell = 1/2$ と $\ell = 1/5$ のときに, 黄緑色と青色の曲線の最大値の大小が入れ替わる. さらに, $\ell > 0$, $|\bar{u}| < \sqrt{3}/9$ でとめたとき, $\Phi(\bar{u}, d; \ell)$ は d に関して単調である.

これら事実と S_ℓ の対称性 (2.19) より, ℓ をとめるごとの, $\Phi(\bar{u}, d; \ell)$ の高さ m の等高線形状は (2.25) の極値

$$m_c(\ell) := \frac{\sqrt{3}|1 - \ell|^{3/2}}{9} \quad \text{for } 0 < \ell \leq 1, \quad (3.1)$$

と (2.27) の $\bar{u} = \sqrt{3}/9$ での値

$$m_e(\ell) := \frac{\sqrt{3}|2 - 3\ell|}{18} \quad (3.2)$$

と (2.26) の $\bar{u} = 0$ での値 $\ell/2$ という 3 つの値の大小によって変化することがわかる.

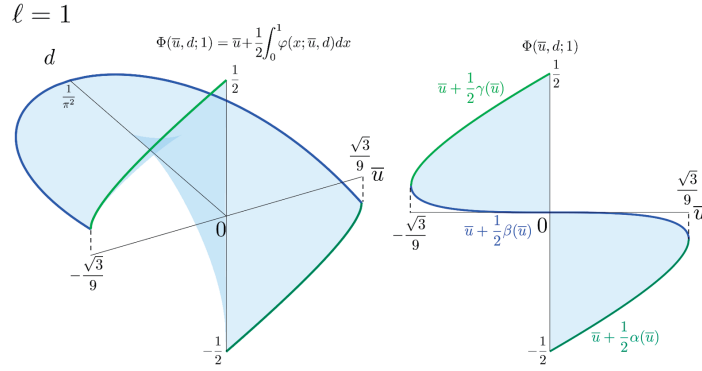


図4 $\ell = 1$ のときの, 曲面 S_ℓ の鳥瞰図 (左) と正面図 (右)

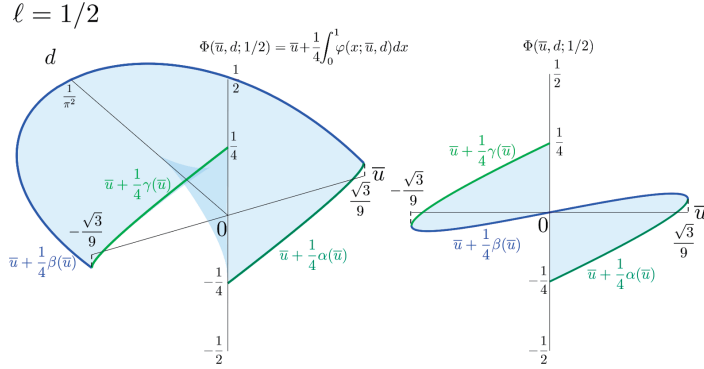


図5 $\ell = 1/2$ のときの, 曲面 S_ℓ の鳥瞰図 (左) と正面図 (右)

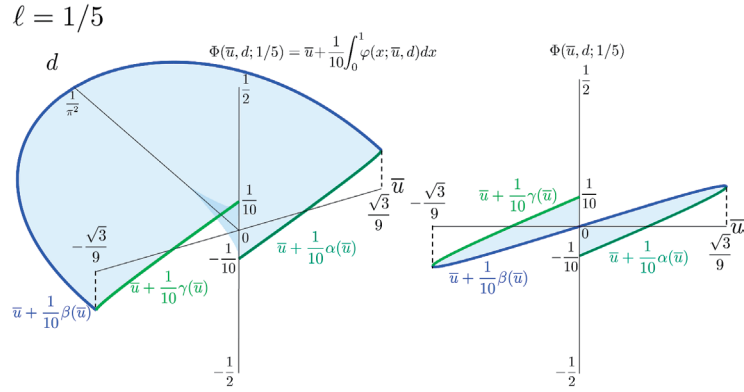


図6 $\ell = 1/5$ のときの, 曲面 S_ℓ の鳥瞰図 (左) と正面図 (右)

$\ell \geq 1$ の場合の (SP) の解の大域的分岐構造に関する数値計算結果を述べる. 図7は, $\ell = 1.1$ として, 曲面 S_ℓ の形状と m の大きさを変えるごとの等高線をかいた図である. $\ell \geq 1$ の場合, S_ℓ の高さ m の等高線形状が変化するしきい値の3点の大小関係は $0 < m_e(\ell) < \ell/2$ となることに注意し, 高さ m の等高線の形状が変化するたび, 代表的形状となるものを並べた.

図からわかる等高線の形状について説明する. 等高線は $m = 0$ のとき, 等高線は直線 $\bar{u} = 0$ である. $0 < m < m_e(\ell)$ のとき, 等高線は $d = (1 - 3\beta(\bar{u})^2)/\pi^2$ 上の点と $(\bar{u}, d) = (0, 0)$ をつなぐ曲線である. $m = m_e(\ell)$ のとき, 等高線は $(\bar{u}, d) = (-\sqrt{3}/9, 0)$ と $(\bar{u}, d) = (0, 0)$ をつな

ぐ曲線である. $m_e(\ell) < m < \ell/2$ のとき, 等高線は $d = 0$ 上の点と $(\bar{u}, d) = (0, 0)$ をつなぐ曲線である. $m \geq \ell/2$ のとき, 等高線は存在しない.

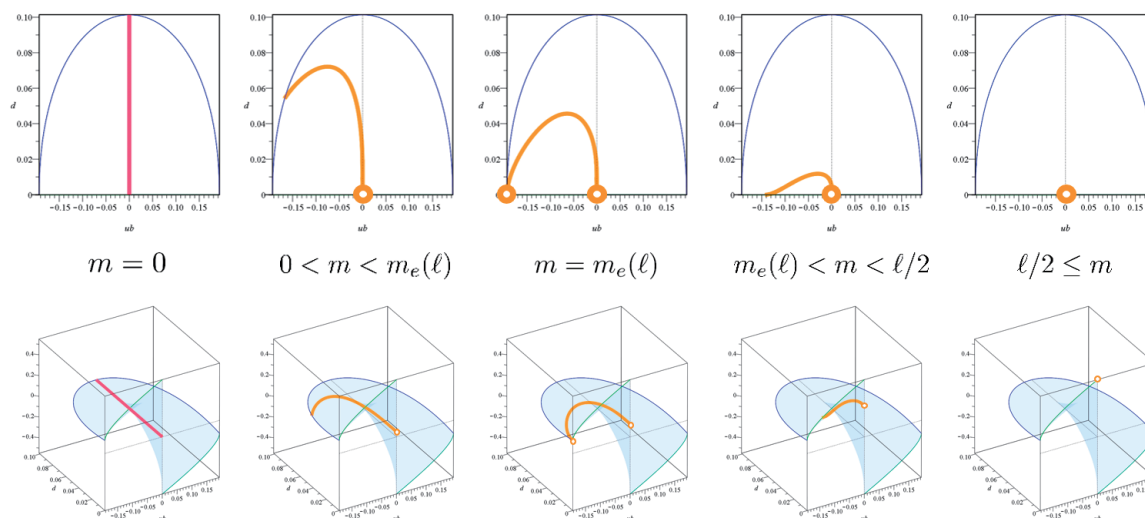


図7 $\ell = 1.1$ のときの曲面 S_ℓ の m ごとの等高線の変化

図8では, 曲面 S_ℓ の正の範囲を正面から見た図である. 図中の橙色の直線は図7の m の分類に対応する. $m = \ell/2$ が曲面の最大値なので, $m \geq \ell/2$ では等高線が存在しないことがわかる. また, 等高線が $d = (1 - 3\beta(\bar{u})^2)/\pi^2$ 上の点と $(\bar{u}, d) = (0, 0)$ をつなぐ曲線になるときと, $d = 0$ 上の点と $(\bar{u}, d) = (0, 0)$ をつなぐ曲線になるときを分ける点として $m = m_e(\ell)$ があることがわかる.

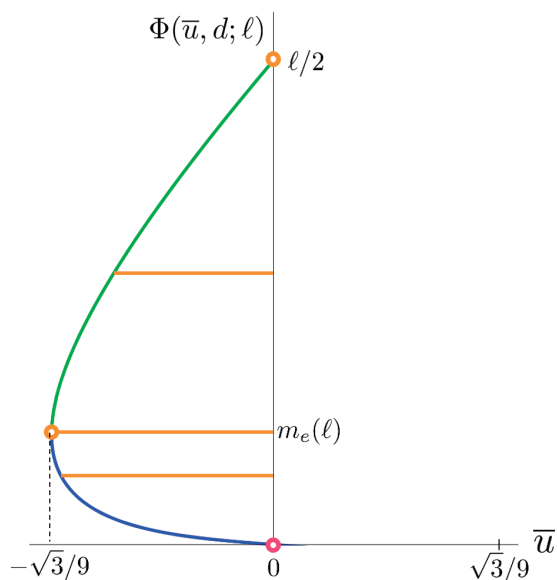


図8 $\ell = 1.1$ のときの等高線の変化

図9は横軸に ℓ , 縦軸に m をとり, $m = \ell/2$, $m = m_e(\ell)$, $m = m_e(\ell)$ のグラフをそれぞれ, 黄緑色, 深緑色, 青色でかいた図である. 図中の赤色で書かれた直線は $\ell = 1.1$ である. この図

より $\ell = 1.1$ で, $m = \ell/2$, $m = m_e(\ell)$ が等高線の形状変化のしきい値になっていることを確認できる.

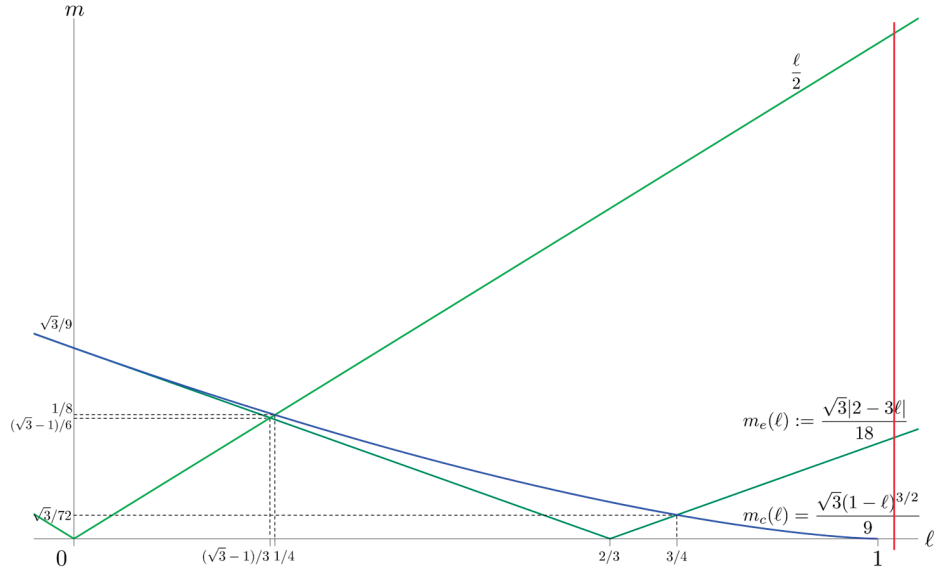


図 9 $\ell/2$, $m_e(\ell)$, $m_c(\ell)$ のグラフ

$\ell/2$, $m_e(\ell)$, $m_c(\ell)$ の大小関係が入れ替わる ℓ の分類ごとに, ℓ をとめて, 曲面 S_ℓ をかき, 等高線の変化をかいた数値計算結果を以下に列挙する.

図 10 は $\ell \geq 1$ のときの代表的なものとして, $\ell = 1.1$ のときの等高線の変化をかいたものである

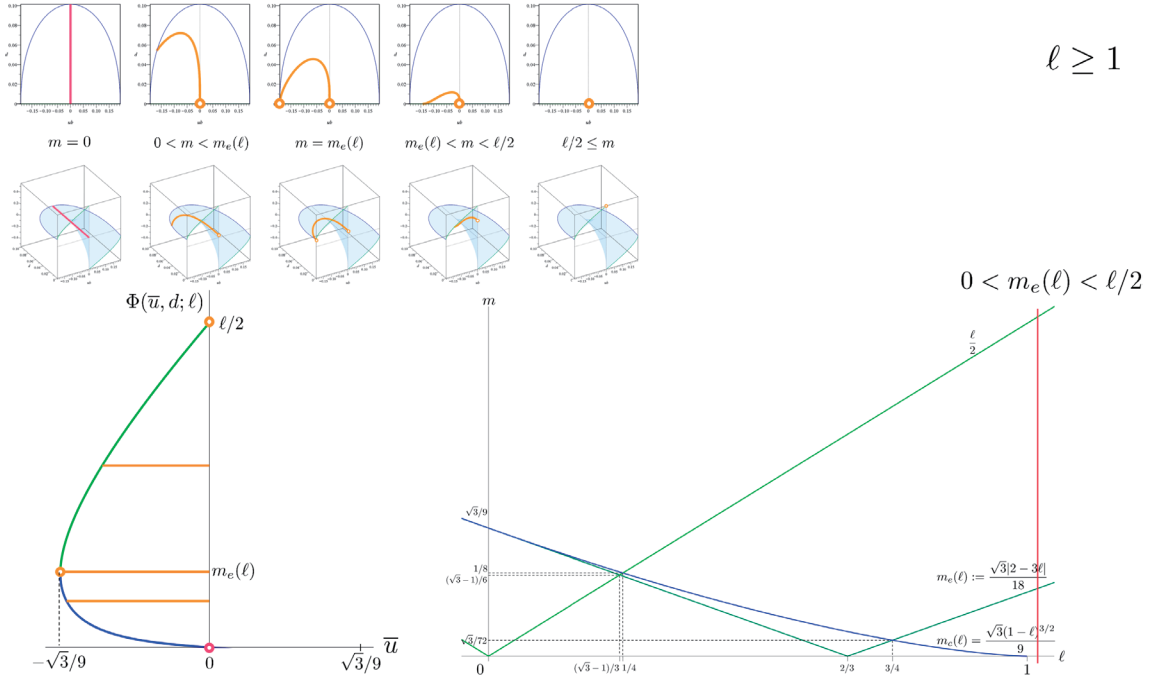


図 10 $\ell = 1.1$ のときの曲面 S_ℓ と m ごとの等高線の変化

図 11 は $3/4 < \ell < 1$ のときの代表的なものとして, $\ell = 0.8$ のときの等高線の変化をかいたものである

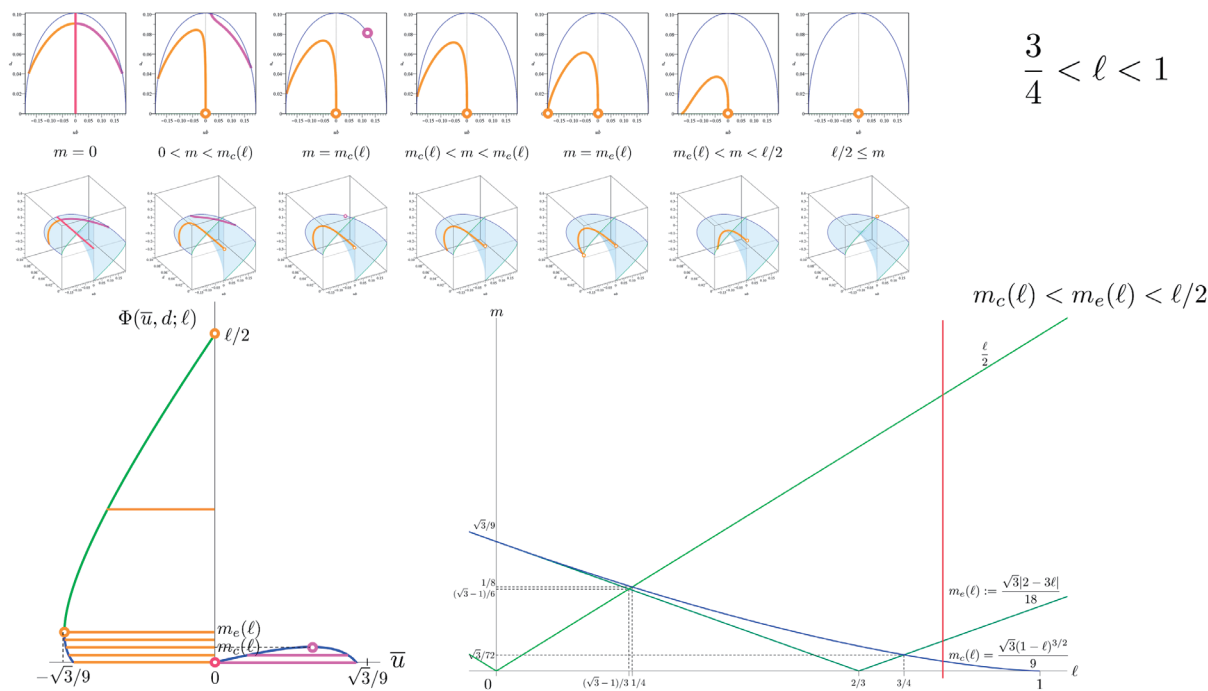


図 11 $\ell = 0.8$ のときの曲面 $\mathcal{S}_\ell$ と m ごとの等高線の変化

図 12 は $\ell = 3/4$ のときの曲面 $\mathcal{S}_\ell$ と m ごとの等高線の変化をかいたものである。

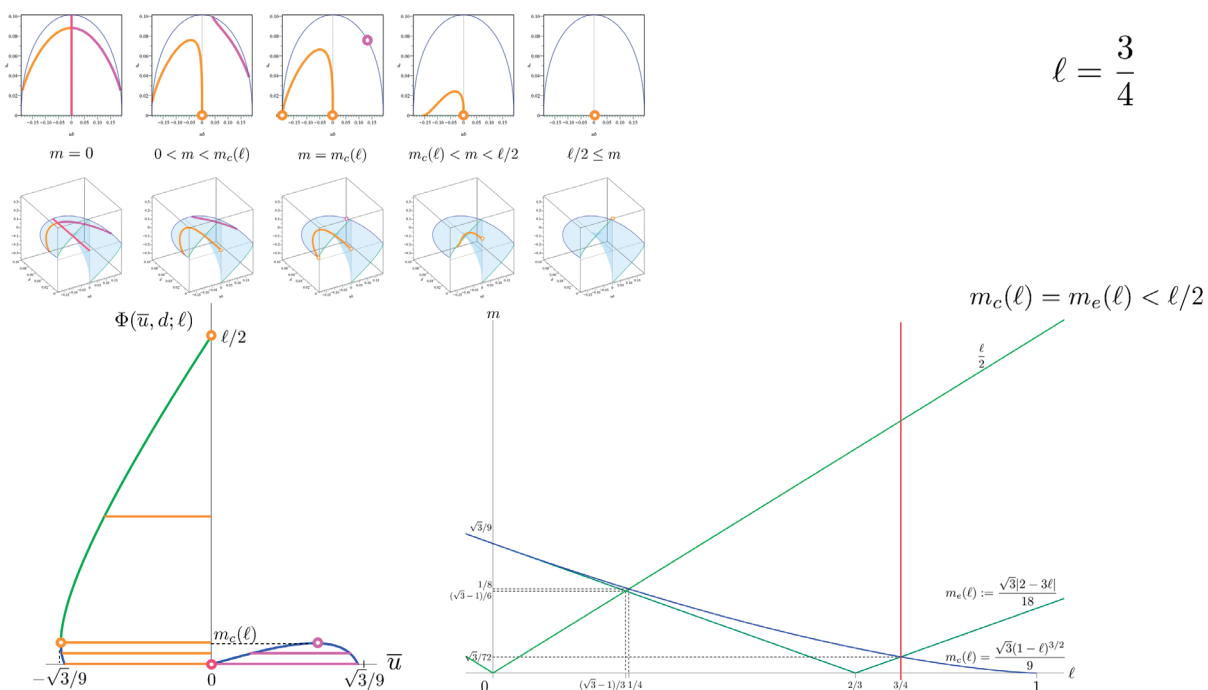


図 12 $\ell = 3/4$ のときの曲面 $\mathcal{S}_\ell$ と m ごとの等高線の一覧

図 13 は $2/3 < \ell < 3/4$ のときの代表的なものとして, $\ell = 0.7083$ のときの等高線の変化を

かいたものである.

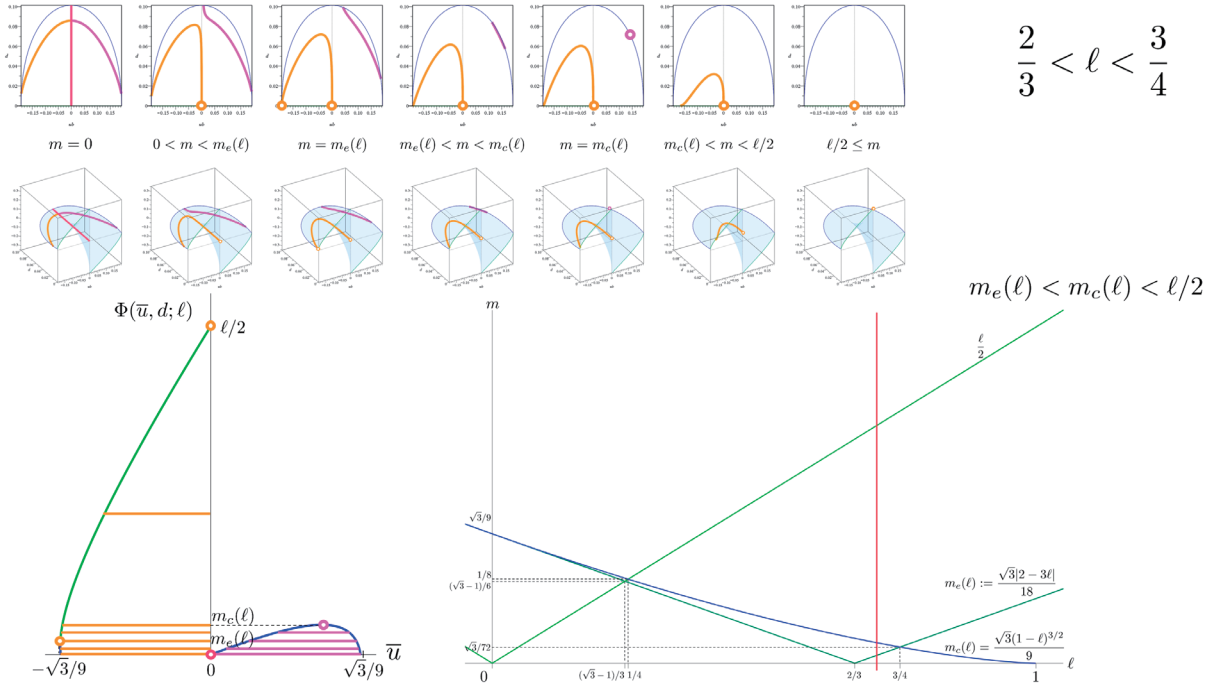


図 13 $\ell = 0.7083$ のときの曲面 $\mathcal{S}_\ell$ と m ごとの等高線の一覧

図 14 は $\ell = 2/3$ のときの等高線の変化をかいたものである.

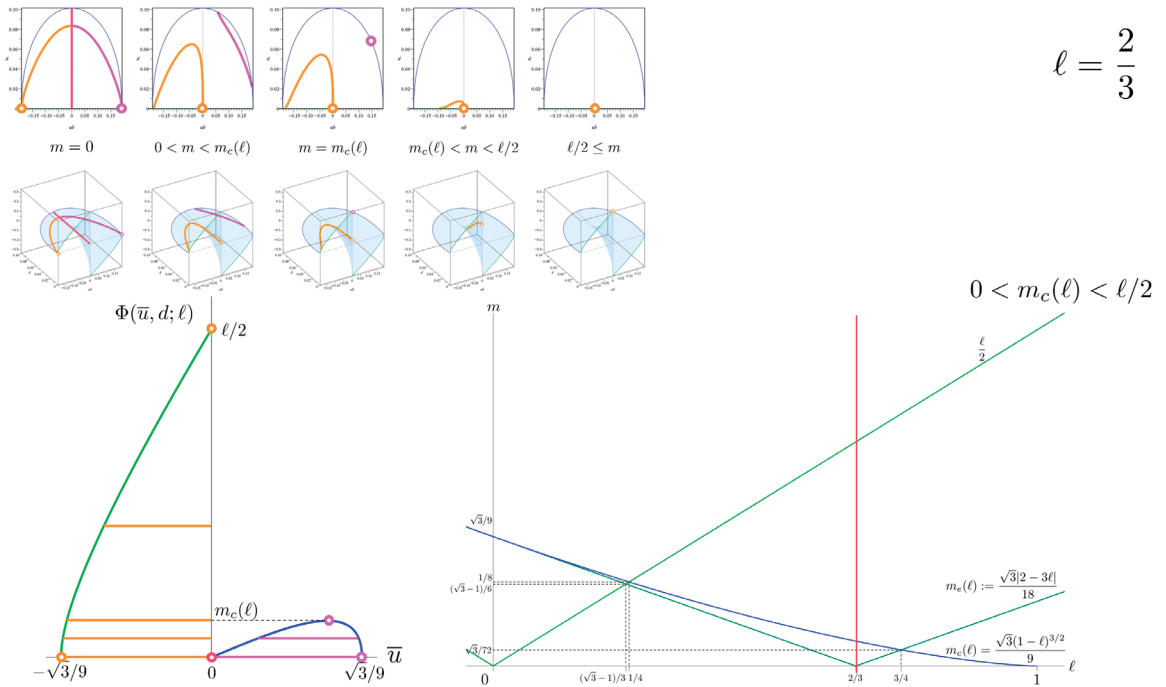


図 14 $\ell = 2/3$ のときの曲面 $\mathcal{S}_\ell$ と m ごとの等高線の一覧

図 15 は $1/4 < \ell < 2/3$ のときの代表的なものとして, $\ell = 0.5$ のときの等高線の変化をかき

たものである.

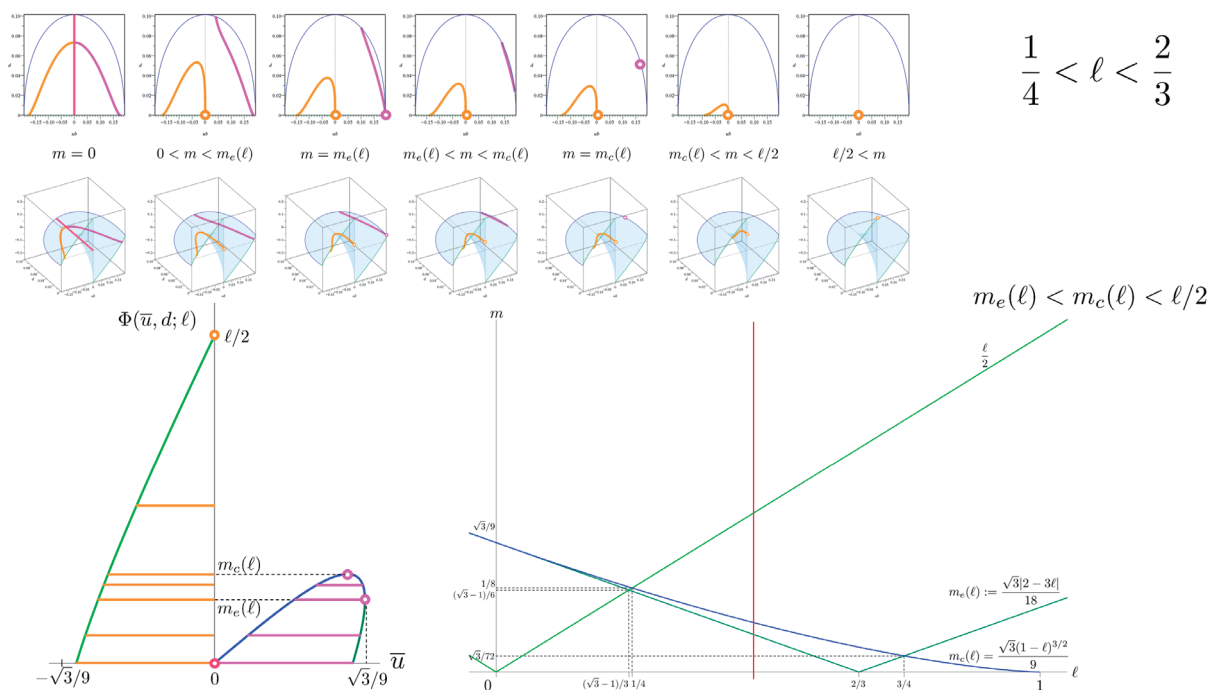


図 15 $\ell = 0.5$ のときの曲面 S_ℓ と m ごとの等高線の一覧

図 16 は $\ell = 1/4$ のときの等高線の変化をかいたものである.

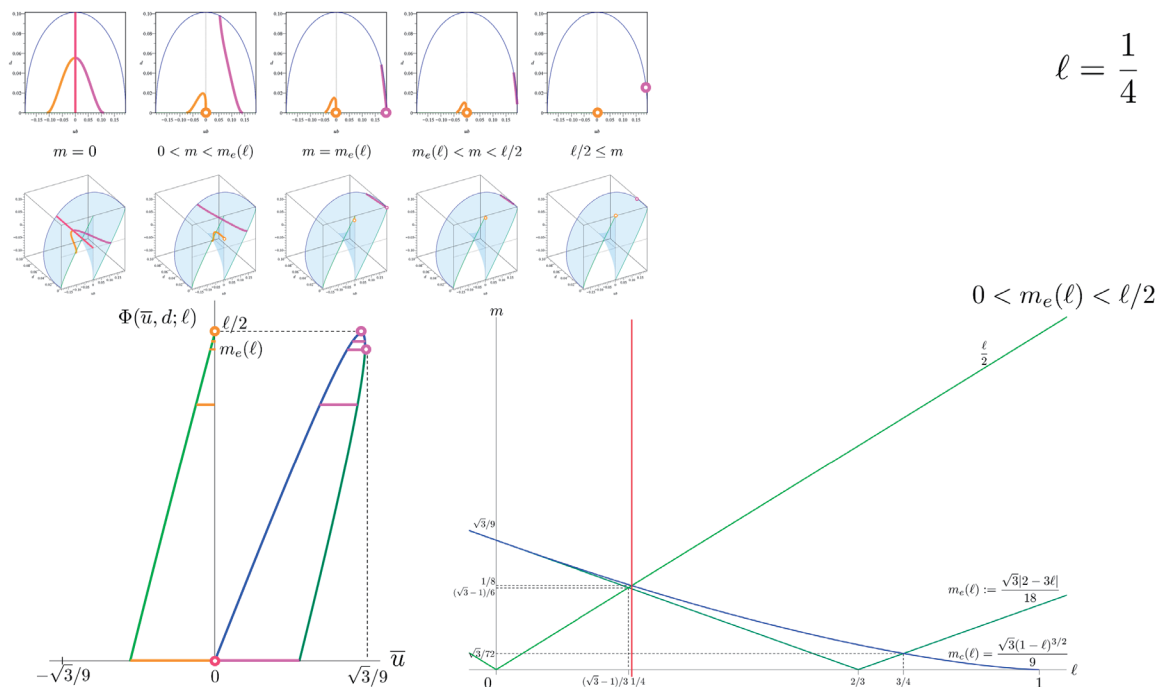


図 16 $\ell = 1/4$ のときの曲面 S_ℓ と m ごとの等高線の一覧

図 17 は $(\sqrt{3}-1)/4 < \ell < 1/4$ のときの代表的なものとして, $\ell = 0.248$ のときの等高線の

変化をかいたものである。

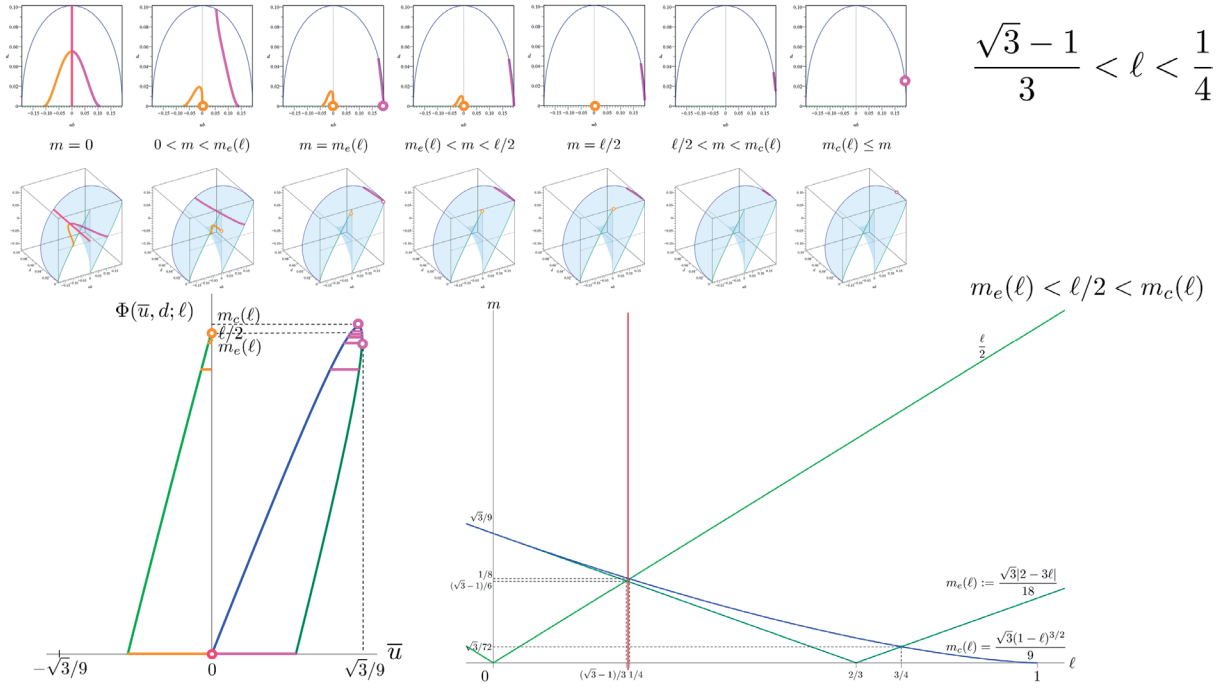


図 17 $\ell = 0.248$ のときの曲面 S_ℓ と m ごとの等高線の一覧

図 18 は $\ell = (\sqrt{3}-1)/4$ のときの等高線の変化をかいたものである。

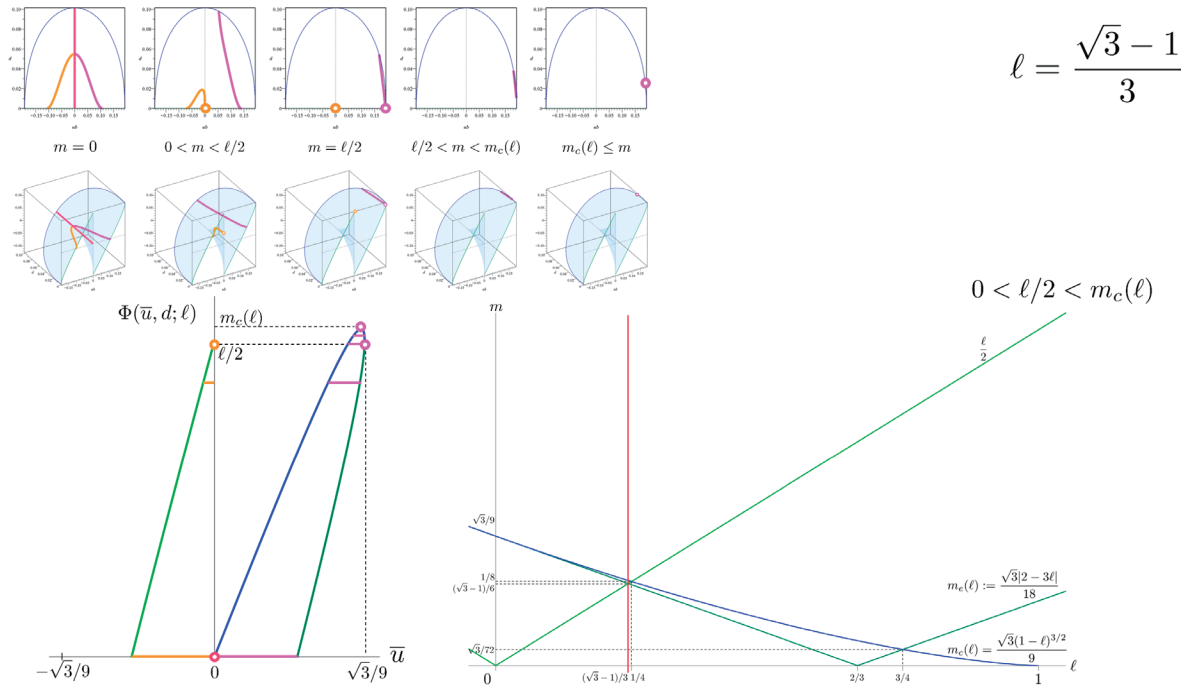


図 18 $\ell = (\sqrt{3}-1)/3$ のときの曲面 S_ℓ と m ごとの等高線の一覧

図 19 は $0 < \ell < (\sqrt{3}-1)/4$ のときの代表的なものとして, $\ell = 0.22$ のときの等高線の変化

をかいたものである.

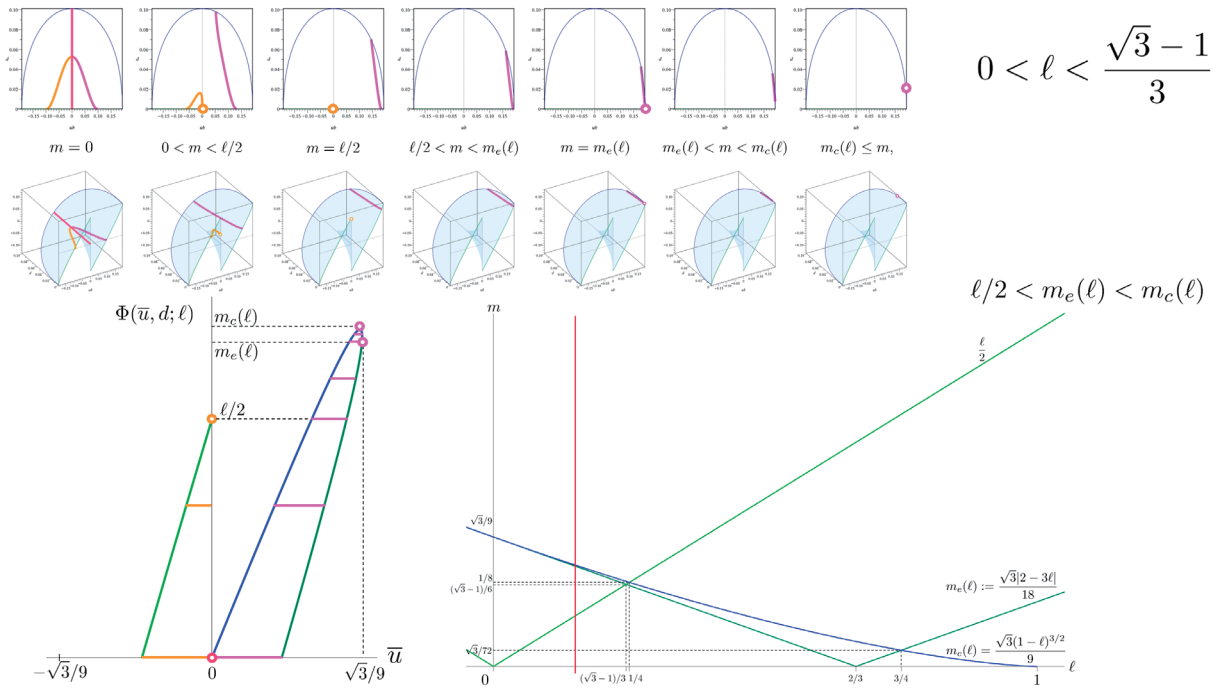


図 19 $\ell = 0.22$ のときの曲面 S_ℓ と m ごとの等高線の変化

図 11-19 より, 等高線形状の種類は全部で 24 種類であることがわかる. また, $0 < \ell < 1$, $m = 0$ のとき, 等高線の形状は常に $\bar{u} = 0$ に軸があるフォーク状になる. これより, ある $d_* \in (0, 1/\pi^2)$ が存在し, (SP) の解が $(\bar{u}, d) = (0, d_*)$ で 2 次分岐が起こることが予想できる.

4 まとめ

本稿では (SP; $(0, 1)$) の解の大域的構造を解析するための準備として, 解の大域的構造に関する数値計算を行った. 解の大域的構造を調べることは補助的な非線形境界値問題 (AP) を経由することで, 各 $\ell > 0$ ごとに, 曲面 S_ℓ の高さ m の等高線の形状を調べることに帰着される. このことから, 曲面 S_ℓ を数値的に構成し, 等高線を形状の分類を行った.

数値計算結果から, 次のことが予想される.

- $\ell > 0$ とする. 曲面 S_ℓ の等高線は $\bar{u}$ に関する 1 価関数となる. ただし, $\bar{u} \neq 0$.
- $\ell > 0$ とする. 曲面 S_ℓ の等高線の形状は 24 種類のみである.
- $0 < \ell < 1$ とする. ある $d_* \in (0, 1/\pi^2)$ が存在し, (SP) の解は $(\bar{u}, d) = (0, d_*)$ で 2 次分岐する.

これらの予想を数学的に証明するための 1 つの方針は, 曲面 S_ℓ のなんらかの解析的な表示を求め, それを元に計算を行うことである. ゆえに, 今後の課題は曲面 S_ℓ の解析的な表示を求めることである.

参考文献

- [1] G.Caginalp, An analysis of a phase field model of a free boundary, *Arch. Ration. Mech. Anal.*, **92** (1986), 205–245.
- [2] C.M. Elliott and S. Zheng, Global existence and stability of solutions to the phase field equations, in: K.H. Hoffmann, J. Sprekels (Eds.), *Free Boundary Problems: International Series of Numerical Mathematics*, vol. 95, Birkhauser Verlag, Basel, 1990, pp. 46–58.
- [3] G.J.Fix, Phase field methods for free boundary problems, in: A. Fasano, M. Primicerio (Eds.), *Free Boundary Problems: Theory and Applications*, Pitman, London, 1983, pp. 580–589.
- [4] T. Suzuki and S. Tasaki, Stationary Fix-Caginalp equation with non-local term, *Nonlinear Analysis*, **71** (2009), 1329–1349.
- [5] J.Smoller and A.Wasserman, Global bifurcation of steady-state solutions, *J. Differential Equations*, **39** (1981), 269–290.

(原稿提出: 2021 年 11 月 18 日; 修正稿提出: 2021 年 12 月 7 日)