

Existence region of stationary solutions of a cell polarization model with mass conservation

メタデータ	言語: jpn 出版者: 公開日: 2021-04-05 キーワード (Ja): キーワード (En): 作成者: 森, 竜樹 メールアドレス: 所属:
URL	https://mu.repo.nii.ac.jp/records/1503

ある質量保存を持つ細胞極性モデルの定常解の存在領域

Existence region of stationary solutions of a cell polarization model with mass conservation

森 竜 樹¹

Tatsuki Mori

1 背景

本研究は久藤 衡介（早稲田大学），辻川 亨（宮崎大学*），四ツ谷 晶二（龍谷大学*）との共同研究に基づくものである。

双安定連立反応拡散方程式:

$$\begin{cases} \varepsilon W_t = \varepsilon^2 W_{xx} + W(W-1)(V+1-W), & x \in (0, 1), t \in (0, \infty), & (1.1) \\ \varepsilon V_t = DV_{xx} - W(W-1)(V+1-W), & x \in (0, 1), t \in (0, \infty), & (1.2) \\ W_x(0, t) = W_x(1, t) = V_x(0, t) = V_x(1, t) = 0, & & (1.3) \\ W(x, 0) = W_0(x), V(x, 0) = V_0(x) & & (1.4) \end{cases} \quad (\text{TP})$$

の解構造に興味を持っている。ここで、 $W = W(x, t)$, $V = V(x, t)$ は未知関数, ε, D は正定数, 初期値 $W_0(x)$, $V_0(x)$ は非負である。方程式より, $W(x, t)$ と $V(x, t)$ の総量が常に保存されることが分かる。総量を m とすると, m は初期値から決まる定数で,

$$\int_0^1 (W_0(x) + V_0(x)) dx = m \quad (1.5)$$

が成り立つ。

(TP) は 2007 年に S.Ishihara, M.Otsuji and A.Mochizuki [2], M.Otsuji, S.Ishihara, C.Co, et al. [1] で細胞極性現象を記述するために提案された数理モデルを基礎としている。

細胞極性とは細胞膜内の活性タンパク質と細胞質内の不活性タンパク質が加水分解反応を起こし, 活性タンパク質の濃度が細胞内で偏ることをいう。初期の活性タンパク質の濃度は一様であるが, 次第に濃度の偏りが生まれる現象が観察され。細胞極性のメカニズムの理解は細胞の様々な機能分化の理解のために重要である。(TP) では W が活性タンパク質の濃度, V が不活性タンパク質の濃度, ε, D がそれぞれの拡散係数に対応してる。

2007 年に提案された数理モデルでは活性タンパク質が持つポジティブフィードバック機構をヒル関数で記述しており, 詳細な数学的解析を行うには難しい設定になっている。そこで, この問題が持つ一般的な性質を調べるために, 2011 年に Y.Mori, A.Jilkinе and L.Edelstein-

¹ 武蔵野大学数理工学センター員 / 武蔵野大学工学部数理工学科助教

Keshet [3] は, 非線形項を数学的性質が似ている双安定な 3 次の多項式に取り替えた (TP) を導出し, 解析を行った.

(TP) の定常問題は m を与えられた正定数とし, $V(x), W(x)$ を未知関数とする, 方程式

$$\begin{cases} \varepsilon^2 W_{xx} + W(W-1)(V+1-W) = 0 & \text{in } (0, 1), & (1.6) \\ D V_{xx} - W(W-1)(V+1-W) = 0 & \text{in } (0, 1), & (1.7) \\ W_x(0) = W_x(1) = 0, \quad V_x(0) = V_x(1) = 0, & & (1.8) \\ W(x) > 0 & \text{in } (0, 1), & (1.9) \\ V(x) > 0 & \text{in } (0, 1), & (1.10) \\ \int_0^1 (W(x) + V(x)) dx = m & & (1.11) \end{cases}$$

である.

Y.Mori, A.Jilkin, L.Edelstein-Keshet らは, 実際の現象において, 不活性タンパク質が細胞質内を拡散する速度は 活性タンパク質が細胞膜内を拡散する速度よりも早いことに着目して (SP) において不活性タンパク質の拡散係数 D を無限大とした次の極限形を導出し, 特に $W(x)$ が単調増加なものに注目した:

$$\begin{cases} \varepsilon^2 W_{xx} + W(W-1)(\tilde{V}+1-W) = 0 & \text{in } (0, 1), & (1.12) \\ W_x(0) = W_x(1) = 0, & & (1.13) \\ W(x) > 0 & \text{in } (0, 1), & (1.14) \\ W_x(x) > 0 & \text{in } (0, 1), & (1.15) \\ \tilde{V} > 0, & & (1.16) \\ \int_0^1 W(x) dx + \tilde{V} = m, & & (1.17) \end{cases}$$

ここで, $W = W(x)$ は未知関数, \tilde{V} は未知定数である.

[3] において, (SP_∞) の定常解の分岐構造が数値的に解析されている. T.Mori, K.Kuto, T.Tsujikawa, M.Nagayama and S.Yotsutani [4] では (SP_∞) のすべての解の表示式が導出され, その表示式を用いて, T.Mori, K.Kuto, T.Tsujikawa, S.Yotsutani [5] において, 定常解の大域的な分岐構造の概容が明らかにされた.

これまで, (SP_∞) の解構造は詳細に調べられてきたが, (SP) の解構造は調べられていない状況である.

さて, (1.6), (1.7), (1.8) より, $\varepsilon^2 W(x) + DV(x)$ は定数となり,

$$V(x) + \frac{\varepsilon^2}{D} W(x) \equiv \text{定数} (= V^*) \quad (1.18)$$

であることがわかる.

したがって, (SP) は m を与えられた正定数とし, V^* を未知定数, $W(x)$ を未知関数とす

る, 次の問題へと書き換えることができる:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\varepsilon^2}{1 + \frac{\varepsilon^2}{D}} W_{xx} + W(W-1) \left(\frac{V^* + 1}{1 + \frac{\varepsilon^2}{D}} - W \right) = 0 \quad \text{in } (0, 1), \end{array} \right. \quad (1.19)$$

$$W_x(0) = W_x(1) = 0, \quad (1.20)$$

$$W(x) > 0 \quad \text{in } (0, 1), \quad (1.21)$$

$$V^* - \frac{\varepsilon^2}{D} W(x) > 0 \quad \text{in } (0, 1), \quad (1.22)$$

$$\left(1 - \frac{\varepsilon^2}{D} \right) \int_0^1 W(x) dx + V^* = m. \quad (1.23)$$

(1.18) から, V^* と $W(x)$ が求まれば, $V(x)$ は次式で与えられる:

$$V(x) := V^* - \frac{\varepsilon^2}{D} W(x) \quad \text{in } (0, 1). \quad (1.24)$$

この方程式のすべての解は $W(x)$ が単調増加であるような解のスケーリングと折り返しによって得られる. ゆえに, $W(x)$ が単調増加なものを求めれば十分である.

したがって, ε, D, m を正定数とし, $W(x)$ を未知関数, V^* を未知定数とする, 積分制約条件を持った非線形境界値問題

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\varepsilon^2}{1 + \frac{\varepsilon^2}{D}} W_{xx} + W(W-1) \left(\frac{V^* + 1}{1 + \frac{\varepsilon^2}{D}} - W \right) = 0 \quad \text{in } (0, 1), \end{array} \right. \quad (1.25)$$

$$W_x(0) = W_x(1) = 0, \quad (1.26)$$

$$(SP_D) \left\{ \begin{array}{l} W(x) > 0 \quad \text{in } (0, 1), \end{array} \right. \quad (1.27)$$

$$W_x(x) > 0 \quad \text{in } (0, 1), \quad (1.28)$$

$$V^* - \frac{\varepsilon^2}{D} W(x) > 0 \quad \text{in } (0, 1), \quad (1.29)$$

$$\left(1 - \frac{\varepsilon^2}{D} \right) \int_0^1 W(x) dx + V^* = m \quad (1.30)$$

を考察すればよい.

問題 (SP_∞) と (SP_D) の解析を難しくしている点は, 非線形項に積分制約条件から決まる未知定数が含まれることである. さらに, (SP_D) が (SP_∞) より困難な点は条件 (1.29) が付加されていることである.

(SP_D) の解析を行う前に, これらの難しさを克服するため, (SP_∞) の解析において行ったアイデアを説明する.

まず, (SP_∞) を \tilde{V} を与えられた正定数とし, $W(x)$ のみを未知関数とする, 次の補助的な非

線形境界値問題

$$\begin{cases}
 \varepsilon^2 W_{xx} + W(W-1)(\tilde{V} + 1 - W) = 0 & \text{in } (0, 1), & (1.31) \\
 W_x(0) = W_x(1) = 0, & & (1.32) \\
 W(x) > 0 & \text{in } (0, 1) & (1.33) \\
 W_x(x) > 0 & \text{in } (0, 1) & (1.34)
 \end{cases}
 \quad (\text{AP}_\infty)$$

と

$$\int_0^1 W(x) dx + \tilde{V} = m \quad (1.35)$$

に分けて考える.

本研究の目的は (SP_D) の大域的解構造について調べることである. 特に, (SP_∞) と有限の D に対する (SP_D) の解構造が連続的につながっているのか, あるいは, 質的な変化を起こすのかは興味深い問題である.

これらを調べるための解析を (SP_∞) でのアイデアをベースに行う. まずは, D, V^*, ε^2 を与えられた正定数とし, $W(x)$ のみを未知関数とする, 次の補助的な非線形境界値問題

$$\begin{cases}
 \frac{\varepsilon^2}{1 + \frac{\varepsilon^2}{D}} W_{xx} + W(W-1) \left(\frac{V^* + 1}{1 + \frac{\varepsilon^2}{D}} - W \right) = 0 & \text{in } (0, 1), & (1.36) \\
 W_x(0) = W_x(1) = 0 & & (1.37) \\
 W(x) > 0 & \text{in } (0, 1) & (1.38) \\
 W_x(x) > 0 & \text{in } (0, 1), & (1.39) \\
 V^* - \frac{\varepsilon^2}{D} W(x) > 0 & \text{in } (0, 1), & (1.40)
 \end{cases}
 \quad (\text{AP}_D)$$

を導入する. (AP_D) の解で積分制約条件

$$\left(1 - \frac{\varepsilon^2}{D} \right) \int_0^1 W(x) dx + V^* = m \quad (1.41)$$

を満たすものが (SP_D) の解となる.

(AP_D) について調べるには, ε^2/D が非線形項が含まれていることから上記のように場合を分けて考えなければならず, (AP_∞) の結果を単純に利用するだけで得られるものではない. そこで, 本稿では, (AP_D) の解の存在領域と一意性について得られた結果を報告する.

本稿の構成は以下のとおりである. 第 2 節で (AP_∞) の既知の結果を説明する. 第 3 節で (AP_D) の解の存在領域を示し, その証明を行う. 第 4 節で本稿のまとめと本研究の今後の課題を述べる.

2 (AP_∞) について

この節では, [4] で得られている (AP_∞) の既知の結果について説明する. 解の存在領域, 一意性, 全ての解の表示式についてである.

Theorem A ([4] の Theorem 2.1). $\tilde{V} > 0$ とする. (AP_∞) が解を持つための必要十分条件は $(\tilde{V}, \varepsilon^2) \in \mathcal{G}$ である. ただし,

$$\mathcal{G} := \left\{ (\tilde{V}, \varepsilon^2) : 0 < \varepsilon^2 < \frac{\tilde{V}}{\pi^2} \right\}. \quad (2.1)$$

このとき, 解 $W(x; \tilde{V}, \varepsilon^2)$ は一意である. さらに,

$$0 < W(x; \tilde{V}, \varepsilon^2) < \tilde{V} + 1, \quad (2.2)$$

$$W(x; \tilde{V}, \varepsilon^2) = \tilde{V} + 1 - \tilde{V} \cdot W\left(1 - x; \frac{1}{\tilde{V}}, \frac{\varepsilon^2}{\tilde{V}^2}\right) \quad (2.3)$$

が成り立つ.

解 $W(x; \tilde{V}, \varepsilon^2)$ の表示式は

$$W(x, \tilde{V}, \varepsilon^2) = \frac{\tilde{V} + 2}{3} + \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{\tilde{V}^2 + \tilde{V} + 1} \cdot \frac{\beta \cdot (1 - hs) \operatorname{sn}^2(K(\sqrt{h})x, \sqrt{h}) + \alpha \cdot \operatorname{cn}^2(K(\sqrt{h})x, \sqrt{h})}{(1 - hs) \operatorname{sn}^2(K(\sqrt{h})x, \sqrt{h}) + \operatorname{cn}^2(K(\sqrt{h})x, \sqrt{h})}, \quad (2.4)$$

$$\alpha := \alpha(h, s) = \frac{3hs^2 - 2(1+h)s + 1}{\sqrt{3h^2s^4 - 4(h^2+h)s^3 + (4h^2+2h+4)s^2 - 4(h+1)s + 3}}, \quad (2.5)$$

$$\beta := \beta(h, s) = \frac{-hs^2 - 2(1-h)s + 1}{\sqrt{3h^2s^4 - 4(h^2+h)s^3 + (4h^2+2h+4)s^2 - 4(h+1)s + 3}} \quad (2.6)$$

である. ここで, $(h, s) = (h(\tilde{V}, \varepsilon^2), s(\tilde{V}, \varepsilon^2))$ は次の連立超越方程式

$$\begin{cases} \mathcal{E}(h, s) = \sqrt{3} \cdot \frac{\varepsilon}{\sqrt{\tilde{V}^2 + \tilde{V} + 1}}, \end{cases} \quad (2.7)$$

$$\begin{cases} \mathcal{A}(h, s) = \frac{1}{3\sqrt{3}} \cdot \frac{(1 - \tilde{V})(2\tilde{V} + 1)(\tilde{V} + 2)}{\left(\sqrt{\tilde{V}^2 + \tilde{V} + 1}\right)^3}, \end{cases} \quad (2.8)$$

$$\begin{cases} 0 < h < 1, \quad 0 < s < 1, \end{cases} \quad (2.9)$$

の一意な解である. また, $\mathcal{E}(h, s)$, $\mathcal{A}(h, s)$ はヤコビの楕円関数 $\operatorname{sn}(\cdot, \cdot)$, $\operatorname{cn}(\cdot, \cdot)$ と第一種完全楕円積分 $K(\cdot)$ を用いて次のように定義される関数である.

$$\mathcal{E}(h, s) := \frac{\sqrt{2s(1-s)(1-sh)}/K(\sqrt{h})}{\sqrt{3h^2s^4 - 4(h^2+h)s^3 + (4h^2+2h+4)s^2 - 4(1+h)s + 3}}, \quad (2.10)$$

$$\mathcal{A}(h, s) := \frac{2(hs^2 - 2sh + 1)(hs^2 - 2s + 1)(1 - hs^2)}{\left(\sqrt{3h^2s^4 - 4(h^2+h)s^3 + (4h^2+2h+4)s^2 - 4(h+1)s + 3}\right)^3}. \quad (2.11)$$

積分制約条件 (1.35) の表示式は次のとおりである.

Theorem B ([4] の Theorem 2.2). $\tilde{V} > 0$ とする. $W(x; \tilde{V}, \varepsilon^2)$ を (AP_∞) の一意な解とする. $\mathbf{m}(\tilde{V}, \varepsilon^2)$ を

$$\mathbf{m}(\tilde{V}, \varepsilon^2) := \int_0^1 W(x; \tilde{V}, \varepsilon^2) dx + \tilde{V} \quad (2.12)$$

と定義する.

このとき, $\mathbf{m}(\tilde{V}, \varepsilon^2)$ は次の性質を持つ.

$$\mathbf{m}(\tilde{V}, \varepsilon^2) = 2\tilde{V} + 2 - \tilde{V} \mathbf{m}\left(\frac{1}{\tilde{V}}, \frac{\varepsilon^2}{\tilde{V}^2}\right) \quad \text{for any } \tilde{V} > 0, \varepsilon > 0. \quad (2.13)$$

特に,

$$\mathbf{m}(1, \varepsilon^2) = 2 \quad \text{for any } \varepsilon > 0 \quad (2.14)$$

である.

さらに, 表示式は第一種完全楕円積分 $K(\cdot)$ と第三種完全楕円積分 $\Pi(\cdot, \cdot)$ を用いて,

$$\mathbf{m}(\tilde{V}, \varepsilon^2) = \frac{4\tilde{V} + 2}{3} + \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \sqrt{\tilde{V}^2 + \tilde{V} + 1} \cdot \mathcal{M}(h, s), \quad (2.15)$$

$$\mathcal{M}(h, s)$$

$$:= \frac{-(hs^2 - 2(1+h)s + 3) + 4(1-s)(1-sh)\Pi(-sh, \sqrt{h})/K(\sqrt{h})}{\sqrt{3h^2s^4 - 4(h^2+h)s^3 + (4h^2+2h+4)s^2 - 4(1+h)s + 3}}, \quad (2.16)$$

と表される. ここで, $h = h(\tilde{V}, \varepsilon^2)$, $s = s(\tilde{V}, \varepsilon^2)$ は Theorem A で与えられる数である.

最後に, Theorem A, B より, \mathcal{G} 上で定義された曲面

$$\mathcal{S}_\infty := \left\{ \left(\tilde{V}, \varepsilon^2, \mathbf{m}(\tilde{V}, \varepsilon^2) \right) : (\tilde{V}, \varepsilon^2) \in \mathcal{G} \right\} \quad (2.17)$$

を導入し, 解析を行う. 曲面 \mathcal{S}_∞ の高さ m の等高線が (SP_∞) の分岐曲線となる. 言い換えると, 曲面 \mathcal{S}_∞ は分岐曲線を積み重ねて作ることが出来る曲面である. 以上より (SP_∞) の大域的な解構造を見るためには曲面 \mathcal{S}_∞ を調べる必要がある.

曲面 \mathcal{S}_∞ の形状についての数値計算結果を説明する. 図 1 は曲面 \mathcal{S}_∞ を高さ $0 < m < 4$ の範囲で描いたもので, 左から順に鳥瞰図, 真上から見た図, ε^2 軸方向に正面から見た図である. 真上から見た図において, 高さ $m = 1.9, 2, 2.5, 3.1$ の等高線をまとめて描いている. 真上から見た図の中の破線は曲面の境界線で, $\varepsilon^2 = \tilde{V}/\pi^2$ で表される直線である. 正面から見た図において, 破線は, $m = \tilde{V} + 1$ で表される直線で, 真上から見た図で $\varepsilon^2 = \tilde{V}/\pi^2$ に対応する m の値である. 実線は, $0 < \tilde{V} < 1$ のとき $m = \tilde{V} + 1$, $\tilde{V} > 1$ のとき $m = \tilde{V}$ で表される直線で, 真上から見た図では $\varepsilon^2 = 0$ に対応する m の値である.

ある質量保存を持つ細胞極性モデルの定常解の存在領域 (森)

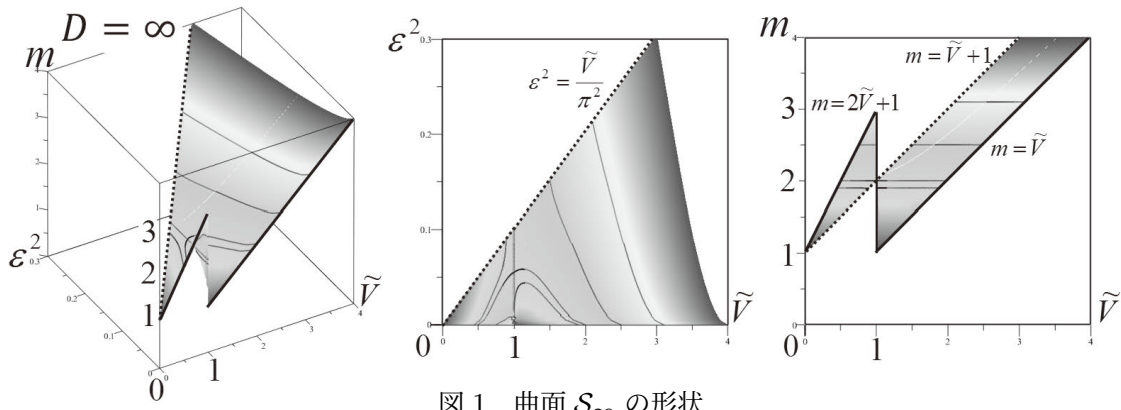


図1 曲面 S_∞ の形状

図2は $D = \infty$ で $m = 1.9, 2$ のときに分岐曲線上の点 $(\tilde{V}, \varepsilon^2)$ に対応する $W(x; \tilde{V}, \varepsilon^2, \infty)$ のグラフを描いたものである。

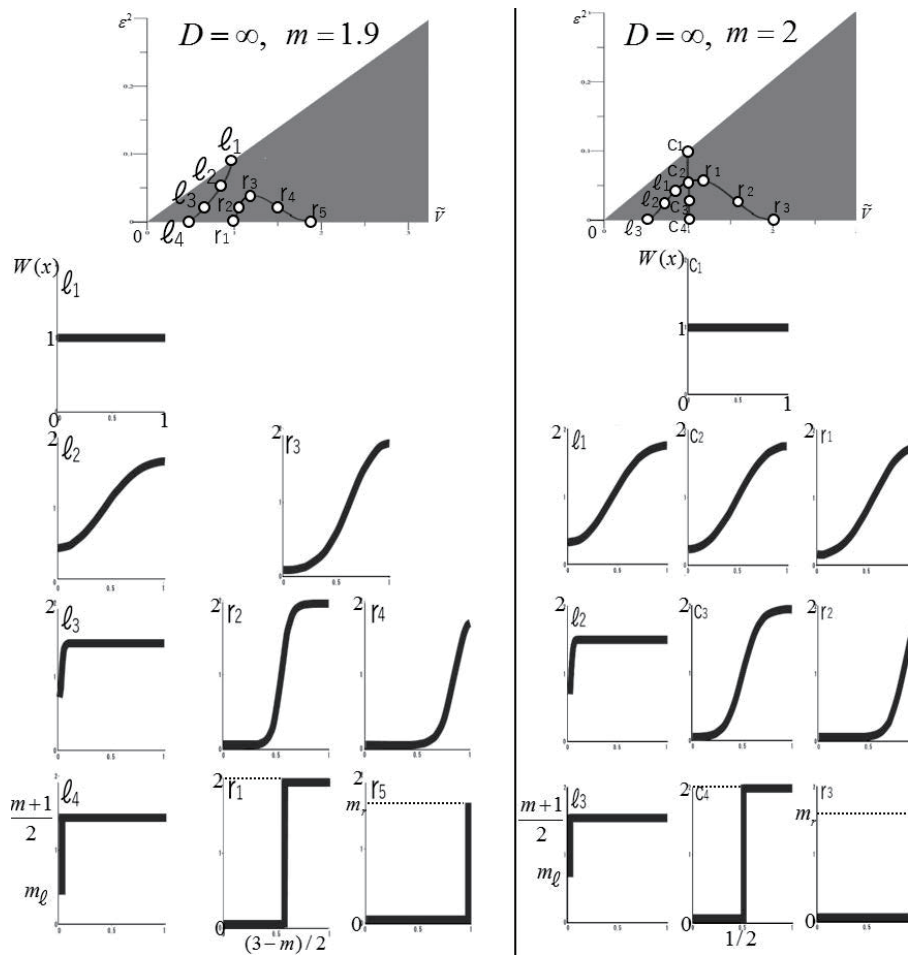


図2 曲面 S_∞ の $(\tilde{V}, \varepsilon^2)$ に対応する $W(x; \tilde{V}, \varepsilon^2, \infty)$ のグラフ

$m = 1.9$ ($1 < m < 2$) のときの解形状について説明する. l_1, l_4 をつなぐ等高線において, $l_1((m-1), (m-1)/\pi^2)$ に対応する W は $W(x; m-1, (m-1)/\pi^2, \infty) \equiv 1$ である. l_1 で定数解から分岐を起こして, l_2, l_3 と変形していき $l_4((m-1)/2, 0)$ に近づくと W は境界層を

持つ

$$W^{\ell,m} = \begin{cases} m_\ell & (x = 0), \\ \frac{m+1}{2} & (0 < x \leq 1) \end{cases} \quad (2.18)$$

へと近づいていく. ここで, $m_\ell := (3 - m + \sqrt{2(9 - m^2)})/6$ である. 次に r_1 と r_5 をつなぐ等高線上の点 $(\tilde{V}, \varepsilon^2)$ に対応する W のグラフの形状を説明する. r_3 から出発して等高線に沿っていくと W は r_2 と変形していき $r_1 = (1, 0)$ に近づくと W は内部遷移層を持つ

$$W^{inter,m} = \begin{cases} 0 & \left(0 \leq x \leq \frac{3-m}{2}\right), \\ 2 & \left(\frac{3-m}{2} < x \leq 1\right) \end{cases}, \quad (2.19)$$

へと近づいていく. また, r_3 から出発して等高線に沿っていくと W は r_4 と変形していき $r_5 = (m, 0)$ に近づくと W は境界層を持つ

$$W^{r,m} = \begin{cases} 0 & (0 \leq x < 1), \\ m_r & (x = 1) \end{cases} \quad (2.20)$$

へと近づいていく. ここで,

$$m_r := \frac{4 + 2m - \sqrt{2(2m+1)(m-1)}}{3} \quad (2.21)$$

である.

$m = 2$ のときの解形状について説明する. $c_1 = (1, 1/\pi^2)$ では $W(x; 1, 1/\pi^2, \infty) \equiv 1$ に対応する. c_1 で定数解から分岐が起こり, $(x, W) = (1/2, 1)$ に関する対称解が出現する. この解は形状を保ちながら c_2, c_3 と変形していく. $c_4 = (1, 0)$ に近づくと W は (2.19) ($m = 2$) で表される $W^{inter,2}$ へと近づく.

次に対称解から 2 次分岐が $c_2 = (1, 0.05536\dots)$ で起こり, 対称性が破れる解が出現する. c_2 から左側の等高線に沿っていくと W は l_1, l_2 と変形していき $l_3 = (1/2, 0)$ に近づくと W は内部遷移層を持つ (2.18) ($m = 2$) の $W^{\ell,2}$ へと近づく. また, c_2 から右側の等高線に沿っていくと, W は r_1, r_2 と変形していき $r_3 = (2, 0)$ に近づくと W は境界層を持つ (2.20) ($m = 2$) の $W^{r,2}$ へと近づく.

3 主結果

(AP_D) の解の存在領域と一意性は次のとおりである.

Theorem 3.1. $0 < \varepsilon^2 < D$ とする. $(V^*, \varepsilon^2) \in \mathcal{G}_D$ ならば, (AP_D) の解が存在する. このとき, 解 $W(x; V^*, \varepsilon^2, D)$ は一意であり,

$$0 < W(x; V^*, \varepsilon^2, D) < \frac{V^* + 1}{1 + \frac{\varepsilon^2}{D}} \quad (3.1)$$

が成り立つ。ただし,

$$\mathcal{G}_D := \left\{ (V^*, \varepsilon^2) : 0 < \varepsilon^2 < \frac{V^*}{\pi^2 + \frac{1}{D}} \right\}. \quad (3.2)$$

さらに, $D \geq 1/\pi^2$ のとき, \mathcal{G}_D は (AP_D) の解の存在領域の全てである.

この定理を証明するために, (AP_∞) の結果を利用する. (AP_∞) の非線形項が持つ零点の大小関係と, (AP_D) の非線形項が持つ零点の大小関係は D によって異なる. ゆえに,

$$\frac{\varepsilon^2}{D} < V^* \quad \left(\Leftrightarrow 1 < \frac{V^* + 1}{1 + \frac{\varepsilon^2}{D}} \right) \quad (3.3)$$

の場合と

$$0 < V^* \leq \frac{\varepsilon^2}{D} \quad \left(\Leftrightarrow \frac{V^* + 1}{1 + \frac{\varepsilon^2}{D}} \leq 1 \right) \quad (3.4)$$

の場合に分ける必要がある.

Theorem 3.1 は次の 2 つの Lemma から得られる.

Lemma 3.1. $0 < \varepsilon^2 < D$ とする. $V^* > \varepsilon^2/D$ のとき, (AP_D) が解を持つための必要十分条件は,

$$0 < \varepsilon^2 < \frac{V^*}{\pi^2 + \frac{1}{D}} \quad (3.5)$$

である. このとき, 解 $W(x; V^*, \varepsilon^2, D)$ は一意である. さらに, (3.1), (1.40) が成り立つ.

Proof. $\varepsilon^2/D < V^*$ より, $1 < (V^* + 1)/(1 + \varepsilon^2/D)$ である. (AP_D) において 1 対 1 の定数の変換

$$V_* := \frac{V^* + 1}{1 + \frac{\varepsilon^2}{D}} - 1, \quad (3.6)$$

$$\varepsilon_*^2 := \frac{\varepsilon^2}{1 + \frac{\varepsilon^2}{D}} \quad (3.7)$$

により, (AP_D) は (AP_∞) に帰着される. したがって, Theorem A より, 解を持つための条件は

$$0 < \varepsilon_*^2 < \frac{V_*}{\pi^2} \quad (3.8)$$

である。ゆえに,

$$\frac{\varepsilon^2}{1 + \frac{\varepsilon^2}{D}} < \frac{1}{\pi^2} \left(\frac{V^* + 1}{1 + \frac{\varepsilon^2}{D}} - 1 \right),$$

すなわち,

$$\varepsilon^2 < \frac{V^*}{\pi^2 + \frac{1}{D}}$$

となり, 結果を得る.

(2.2) より, (3.1) が成り立つ. (3.1) と $V^* > \varepsilon^2/D$ より,

$$V^* - \frac{\varepsilon^2}{D} W(x) > V^* - \frac{\varepsilon^2}{D} \cdot \frac{V^* + 1}{1 + \frac{\varepsilon^2}{D}} = D \cdot \frac{V^* - \frac{\varepsilon^2}{D}}{D + \varepsilon^2} > 0$$

となり, (1.40) は自動的に成り立つ. □

Lemma 3.2. $0 < V^* \leq \varepsilon^2/D$, $0 < \varepsilon^2 < D$, $D \geq 1/\pi^2$ とする. このとき, (AP_D) の解は存在しない.

Proof. $0 < V^* \leq \varepsilon^2/D$ より, $0 < (V^* + 1)/(1 + \varepsilon^2/D) < 1$ である.

(1.36) に変数変換

$$\tilde{W} := \frac{W}{\frac{V^* + 1}{1 + \frac{\varepsilon^2}{D}}} \tag{3.9}$$

を行うと,

$$\frac{\frac{\varepsilon^2}{1 + \frac{\varepsilon^2}{D}}}{\left(\frac{V^* + 1}{1 + \frac{\varepsilon^2}{D}} \right)^2} \tilde{W}_{xx} + \tilde{W}(\tilde{W} - 1) \left(\frac{1}{\frac{V^* + 1}{1 + \frac{\varepsilon^2}{D}}} - \tilde{W} \right) = 0$$

となる. 以上より,

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\varepsilon^2}{1 + \frac{\varepsilon^2}{D}} \tilde{W}_{xx} + \tilde{W}(\tilde{W} - 1) \left(\frac{1}{V^* + 1} - \tilde{W} \right) = 0 \quad \text{in } (0, 1), \\ \left(\frac{V^* + 1}{1 + \frac{\varepsilon^2}{D}} \right)^2 \end{array} \right. \quad (3.10)$$

$$(AP'_D) \left\{ \begin{array}{l} \tilde{W}_x(0) = \tilde{W}_x(1) = 0, \\ \tilde{W}_x(x) > 0, \\ \frac{V^*}{V^* + 1} - \frac{\varepsilon^2}{D} \tilde{W}(x) > 0 \end{array} \right. \quad (3.11)$$

$$\tilde{W}_x(0) = \tilde{W}_x(1) = 0, \quad (3.12)$$

$$\tilde{W}_x(x) > 0, \quad (3.13)$$

$$\frac{V^*}{V^* + 1} - \frac{\varepsilon^2}{D} \tilde{W}(x) > 0 \quad (3.14)$$

$$\frac{\varepsilon^2}{1 + \frac{\varepsilon^2}{D}}$$

を得る.

よって, Theorem A より, (AP'_D) が解を持つための必要十分条件は

$$0 < \frac{\frac{\varepsilon^2}{1 + \frac{\varepsilon^2}{D}}}{\left(\frac{V^* + 1}{1 + \frac{\varepsilon^2}{D}} \right)^2} < \frac{1}{\pi^2} \left(\frac{1}{V^* + 1} - 1 \right) \quad (3.15)$$

である. 整理すると,

$$f(V^*; \varepsilon^2, D) < 0 \quad \left(0 < V^* < \frac{\varepsilon^2}{D} \right) \quad (3.16)$$

となる. ただし,

$$f(V^*; \varepsilon^2, D) := D \left((V^*)^2 + \left(1 - \frac{\varepsilon^2}{D} \right) V^* + \varepsilon^2 \pi^2 \left(1 + \frac{\varepsilon^2}{D} \right) - \frac{\varepsilon^2}{D} \right) \quad (3.17)$$

である.

一方, 独立に $D \geq 1/\pi^2$ のとき,

$$f(V^*; \varepsilon^2, D) > 0 \quad \left(0 < V^* < \frac{\varepsilon^2}{D} \right) \quad (3.18)$$

を示すことが出来る. なぜならば,

$$f(0; \varepsilon^2, D) = \varepsilon^2 \pi^2 \left(\varepsilon^2 + D - \frac{1}{\pi^2} \right) > 0, \quad (3.19)$$

$$f_{V^*}(V^*, \varepsilon^2, D) = D \left(2V^* + \left(1 - \frac{\varepsilon^2}{D} \right) \right) > 0 \quad (3.20)$$

が成り立つからである.

したがって, (AP_D) が解を持つと仮定すると, (3.16) と (3.18) は矛盾する. 以上より $0 < V^* \leq \varepsilon^2/D$, $0 < \varepsilon^2 < D$, $D \geq 1/\pi^2$ のとき, (AP_D) の解は存在しない. \square

4 まとめと今後の課題

本研究では細胞極性モデルに背景を持つ非局所境界値問題の解析を行った. $D = \infty$ の場合の解形状は図 2 に示すように遷移層を持つ解が現れる. [4] では解の安定性を数値的に調べており, 内部遷移層を持つ解が安定であることが分かっている. これより, 本来の細胞極性モデルの非線形項に, 数学的性質の似た非線形項を持つモデルならば, 活性タンパク質が局在する現象が安定に起こること示唆される.

$D < \infty$ の場合は $D = \infty$ の解構造の性質をどの程度保存しているか明らかにされていない. そこで, 本研究では $D < \infty$ の場合の解構造解明の足掛かりとなる (AP_D) の解の存在領域を調べた. 今後の課題は (AP_D) の解の表示式, 積分制約条件 (1.41) の表示式を求め, 曲面 S_∞ に対応する曲面を導入し, (SP_D) の大域的解構造の概容を調べることである. また, $D < 1/\pi^2$ の場合に (AP_D) の解の存在領域がどうなっているかを調べることである.

参考文献

- [1] M.Otsuji, S.Ishihara, C.Co, et al., *A mass conserved reaction-diffusion system captures properties of cell polarity*, PLoS Compt. Biol. 3: e108 (2007).
- [2] S.Ishihara, M.Otsuji and A.Mochizuki, *Transient and steady state of mass-conserved reaction-diffusion systems*, Phys. Rev. E 75 015203(R) (2007).
- [3] Y. Mori, A. Jilkinе and L. Edelstein-Keshet, *Asymptotic and bifurcation analysis of wave-pinning in a reaction-diffusion model for cell polarization*, SIAM J. Appl. Math **71**(2011), 1401-1427.
- [4] T.Mori, K.Kuto, T.Tsujikawa, M.Nagayama and S.Yotsutani, *Global bifurcation sheet and diagrams of wave-pinning in a reaction-diffusion model for cell polarization*, Dynamical Systems, Differential Equations and Applications AIMS Proceedings, 2015, 861–877.
- [5] T.Mori, K.Kuto, T.Tsujikawa, S.Yotsutani, *Exact multiplicity of stationary limiting problem of a cell polarization model*, Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. A, **36** (2016) no. 10, 5627-5655.

(原稿提出: 2020 年 12 月 25 日; 修正稿提出: 2021 年 2 月 2 日)