Discussion about discrete analogue for comparison principle of a discretization for a reaction diffusion equation

メタデータ	言語: jpn 出版者: 公開日: 2021-04-05 キーワード (Ja): キーワード (En): 作成者: 松家, 敬介 メールアドレス: 所属:
URL	https://mu.repo.nii.ac.jp/records/1502

反応拡散方程式の離散化の比較原理の離散類似に関する考察

Discussion about discrete analogue for comparison principle of a discretization for a reaction diffusion equation

松 家 敬 介[1]

Keisuke Matsuya

概要

反応拡散方程式には, 初期条件の大小関係が解の大小関係と一致するという比較原理が知られている. 本稿では, これまでの研究で反応拡散方程式の離散化が提案されており, その離散化で得られた偏差分方程式に対して, 比較原理がどういった形であらわれるか議論した. その結果, 差分刻みに対する条件を与えることで比較原理が成り立つことが分かった. ただし, この条件は十分条件となっている.

1 はじめに

反応拡散方程式:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) = \Delta u(t,x) + F(u(t,x)) \ \left(t \geq 0,\ x \in \mathbb{R}^d\right) \tag{1}$$

は様々な自然現象の数理モデルとして扱われることがしばしばある. ただし, $d \in \mathbb{Z}_{>0}$ とし, Δ は d 次元ラプラシアンとする. (1) には比較原理と呼ばれる次の定理 (日本語の文献だと例えば, [1]) が知られている.

定理 1（比較原理）

(1) の初期条件を $u(0,x) = a(x)$ とした Cauchy 問題の解を $u_1(t,x)$ とし, (1) の初期条件を $u(0,x) = b(x)$ とした Cauchy 問題の解を $u_2(t,x)$ とする. さらに, $a(x) \leq b(x)$ とする. このとき,

$$u_1(t,x) \leq u_2(t,x) \ \left(t \geq 0,\ x \in \mathbb{R}^d\right)$$

が成り立つ.

先行研究 [2] で (1) の $F(u)$ が

$$F(u) = f(u) - u\,g(u)$$

と書けている場合の離散化:

$$u_n^{s+1} = \frac{u_n^s + \delta f\left(m\left(u_n^s\right)\right)}{1 + \delta g\left(m\left(u_n^s\right)\right)} \ \left(s \in \mathbb{Z}_{\geq 0},\ n \in \mathbb{Z}^d\right) \tag{2}$$

[1] 武蔵野大学数理工学センター員 / 武蔵野大学工学部数理工学科准教授

が報告されている．ただし，$\delta > 0$ とし，$e_k \in \mathbb{Z}^d$ は第 k 成分が 1 で他は 0 のベクトルとし，

$$m\left(u_n^s\right) := \sum_{k=1}^{d} \frac{u_{n+e_k}^s + u_{n-e_k}^s}{2d} \tag{3}$$

とする．(2) に対して連続極限： $\delta \to +0$ を施すことで，(1) が得られる．実際に，(2) の右辺を $\delta = 0$ のまわりで展開すると，

$$u_n^{s+1} = m\left(u_n^s\right) + \delta\left\{f\left(m\left(u_n^s\right)\right) - m\left(u_n^s\right) g\left(m\left(u_n^s\right)\right)\right\} + O\left(\delta^2\right)$$

と変形でき，

$$\xi = \sqrt{2\delta d}$$

を満たすとすると，

$$\frac{m\left(u_n^s\right) - u_n^s}{\delta} = \sum_{k=1}^{d} \frac{u_{n+e_k}^s - 2u_n^s + u_{n-e_k}^s}{\xi^2}$$

となることから，さらに，

$$\frac{u_n^{s+1} - u_n^s}{\delta} = \sum_{k=1}^{d} \frac{u_{n+e_k}^s - 2u_n^s + u_{n-e_k}^s}{\xi^2} + f\left(m\left(u_n^s\right)\right) - m\left(u_n^s\right) g\left(m\left(u_n^s\right)\right) + O(\delta)$$

と変形できることから，(2) が (1) の離散化となっていることが分かる．

著者は微分方程式を離散化して得られる差分方程式の解の性質と元の微分方程式の解の性質の違いについて興味をもっている．本稿では (2) で $f(u)$, $g(u)$ の形を限定したものに対して定理 1 のような比較原理と類似した性質があるかについて議論したい．具体的には，(2) の $f(u)$, $g(u)$ は正係数の多項式であって，

$$f(u) - u\,g(u) = -u\left(u - \alpha_1\right)\left(u - \alpha_2\right)\cdots\left(u - \alpha_m\right) \ \left(m \in \mathbb{Z}_{\geq 1}\right)$$

を満たすとする．さらに，$f(u)$ と $u\,g(u)$ には同じ次数の項がないとし，$0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_m = 1$ であるとする．例えば，$m = 1$ の場合，

$$-u\left(u - \alpha_1\right) = u - u \cdot u$$

なので，

$$f(u) = u, \ g(u) = u$$

であり，$m = 2$ の場合，

$$-u\left(u - \alpha_1\right)\left(u - \alpha_2\right) = \left(\alpha_1 + 1\right) u^2 - u\left(u^2 + \alpha_1\right)$$

なので，

$$f(u) = \left(\alpha_1 + 1\right) u^2, \ g(u) = u^2 + \alpha_1$$

である．一般的には,

$$f(u)=\sum_{k=0}^{\left[\frac{m-1}{2}\right]} C_{2k+1}^{m}u^{m-2k},\ g(u)=\sum_{k=0}^{\left[\frac{m}{2}\right]} C_{2k}^{m}u^{m-2k}$$

で与えられる．ただし, $[x]$ $(x\in\mathbb{R})$ は x を超えない最大の整数とし, $C_0^m=1$, C_k^m $(k\geq 1)$ は $\alpha_1,\ldots,\alpha_m$ たちの k 次基本対称式とする．このような $f(u),\ g(u)$ は Fisher-KPP 方程式や Allen-Cahn 方程式といった反応拡散方程式 (日本語の文献だと例えば, [1]) の反応項に対応するものも含まれた形となっている．

$f(u),\ g(u)$ を正係数の多項式としているのは著者が超離散化に興味をもっているからである．超離散化とは, 有理式の形をした差分方程式に対して新たな差分方程式が得る極限操作 [3, 4] のことである．超離散化で得られた差分方程式はまるめ誤差を考える必要がなく, 数値計算に適している．さらに, 方程式の解として箱玉系 [3, 5] を代表とするセルオートマトンが得られることもある．セルオートマトンとは有限の状態をとる離散力学系のことである．箱玉系はソリトン方程式に代表される可積分系の方程式と超離散化によってつながっている．筆者は離散化だけでなく超離散化であって可積分系の方程式とは限らない微分方程式の解の性質を保持するものを探すことにも興味をもっている．ただ, 差分方程式に減算があると極限をとることができないために超離散化を行うことができない [4]．[2] で報告された離散化は減算を含む反応拡散方程式を超離散化できるものである．

本稿の構成は以下の通りである．まず, 第 2 節では (2) で $f(u),\ g(u)$ の形を限定したものの解の有界性に関する性質について議論する．次に第 3 節では (2) に対して成り立つ比較原理の離散類似を与える．この離散類似は, 元の微分方程式の場合と違って条件がついたものとなっており, $f(u),\ g(u)$ の形を限定した場合, その条件を満たすため十分条件についても議論する．最後に第 4 節では本稿の結論と今後の課題を示す．

2　(2) の解の有界性に関する性質

前節で $f(u),\ g(u)$ 定めていた．この場合, 以下に挙げる命題が (1) に対して成り立つ．

命題 1

関数 $a(x)$ が,

$$0\leq a(x)\leq 1\ \left(x\in\mathbb{R}^d\right)$$

を満たす場合, (1) の初期条件を $u(0,x)=a(x)$ とした Cauchy 問題の解を $u(t,x)$ は,

$$0\leq u(t,x)\leq 1\ \left(t>0,\ x\in\mathbb{R}^d\right)$$

を満たす．

この性質と類似した性質である次に命題が成り立つ．

命題 2

a_n $\left(n \in \mathbb{Z}^d\right)$ が,

$$0 \leq a_n \leq 1 \ \left(n \in \mathbb{Z}^d\right)$$

を満たす場合, (2) の初期条件を $u_n^0 = a_n$ とした Cauchy 問題の解を u_n^s は,

$$0 \leq u_n^s \leq 1 \ \left(s \in \mathbb{Z}_{>0},\ n \in \mathbb{Z}^d\right)$$

を満たす.

証明

s に関する帰納法を用いて証明する.

$s = 0$ の場合は仮定から成立している. さらに,

$$0 \leq u_n^s \leq 1 \ \left(n \in \mathbb{Z}^d\right)$$

が成り立つとする. このとき, (3) から,

$$0 \leq m\left(u_n^s\right) \leq 1$$

となる. また, $0 \leq u \leq 1$ のとき,

$$g(u) - f(u) \geq 0$$

が成り立つ. 実際に, 以下よりわかる.

- $m = 2\ell - 1$ $(\ell \geq 1)$ の場合

$$f(u) = \sum_{k=0}^{\ell-1} C_{2k+1}^{2\ell-1} u^{2\ell-1-2k},\ g(u) = \sum_{k=0}^{\ell-1} C_{2k}^{2\ell-1} u^{2\ell-1-2k}$$

であり,

$$\begin{aligned}
g(u) - f(u) &= \sum_{k=0}^{\ell-1} \left(C_{2k}^{2\ell-1} - C_{2k+1}^{2\ell-1}\right) u^{2\ell-1-2k} \\
&= u\left\{-C_1^{2\ell-2} u^{2\ell-2} + \sum_{k=1}^{\ell-2} \left(C_{2k-1}^{2\ell-2} - C_{2k+1}^{2\ell-2}\right) u^{2\ell-2-2k} + C_{2\ell-3}^{2\ell-2}\right\} \\
&= u\left\{C_1^{2\ell-1}\left(1-u^2\right) u^{2\ell-4} + \cdots + C_{2\ell-3}^{2\ell-2}\left(1-u^2\right)\right\} \\
&= u\left(1-u^2\right) \sum_{k=1}^{\ell-1} C_{2k-1}^{2\ell-2} u^{2\ell-2-2k} \geq 0
\end{aligned}$$

となる. 2 つ目の等号では, $C_1^{2\ell-1} - C_0^{2\ell-1} = C_1^{2\ell-2}$ と

$$C_{2k}^m - C_{2k+1}^m = \left(a_m C_{2k-1}^{m-1} + C_{2k}^{m-1}\right) - \left(a_m C_{2k}^{m-1} + C_{2k+1}^{m-1}\right) = C_{2k-1}^{m-1} - C_{2k+1}^{m-1}$$

であることを用いている.

- $m=2\ell\ (\ell \geq 1)$ の場合

$$f(u)=\sum_{k=0}^{\ell-1} C_{2k+1}^{2\ell} u^{2\ell-2k},\ g(u)=\sum_{k=0}^{\ell} C_{2k}^{2\ell} u^{2\ell-2k}$$

であり,

$$\begin{aligned} g(u)-f(u) &= \sum_{k=0}^{\ell-1}\left(C_{2k}^{2\ell}-C_{2k+1}^{2\ell}\right) u^{2\ell-2k} \quad +C_{2\ell}^{2\ell} \\ &= -C_1^{2\ell-1} u^{2\ell}+\sum_{k=1}^{\ell-2}\left(C_{2k-1}^{2\ell-1}-C_{2k+1}^{2\ell-1}\right) u^{2\ell-2k}+C_{2\ell-1}^{2\ell-1} \\ &= C_1^{2\ell-1}\left(1-u^2\right) u^{2\ell-2}+\cdots+C_{2\ell-1}^{2\ell-1}\left(1-u^2\right) \\ &= \left(1-u^2\right) \sum_{k=0}^{\ell-1} C_{2k+1}^{2\ell-1} u^{2\ell-2-2k} \geq 0 \end{aligned}$$

となる.

以上から,

$$1-u_n^{s+1}=1-\frac{u_n^s+\delta f\left(m\left(u_n^s\right)\right)}{1+\delta g\left(m\left(u_n^s\right)\right)}=\frac{1-u_n^s+\delta\left\{g\left(m\left(u_n^s\right)\right)-f\left(m\left(u_n^s\right)\right)\right\}}{1+\delta g\left(m\left(u_n^s\right)\right)} \geq 0$$

であり,

$$u_n^{s+1}=\frac{u_n^s+\delta f\left(m\left(u_n^s\right)\right)}{1+\delta g\left(m\left(u_n^s\right)\right)} \geq 0$$

から帰納法により証明が完了する.

3 (2) に対して成り立つ比較原理の離散類似

(2) に対して成り立つ比較原理の離散類似は以下に挙げるものとなる.

定理 2

$$G(u):=\frac{u+\delta f(u)}{1+\delta g(u)}$$

とし, $G(u)$ が単調増加関数であるとする. さらに, $a_n,\ b_n\ \left(n \in \mathbb{Z}^d\right)$ が,

$$0 \leq a_n \leq b_n\ \left(n \in \mathbb{Z}^d\right)$$

を満たす場合, (2) の初期条件を $u_n^0=a_n$ とした Cauchy 問題の解を u_n^s および (2) の初期条件を $u_n^0=b_n$ とした Cauchy 問題の解を $\tilde{u}_n^s$ は,

$$0 \leq u_n^s \leq \tilde{u}_n^s\ \left(s \in \mathbb{Z}_{>0},\ n \in \mathbb{Z}^d\right)$$

を満たす.

証明

s に関する帰納法を用いて証明する.

$s=0$ の場合は仮定から成立している. さらに,

$$0 \leq u_n^s \leq \tilde{u}_n^s \ \ \left(n \in \mathbb{Z}^d\right)$$

が成り立つとする. このとき, (3) から,

$$0 \leq m\left(u_n^s\right) \leq m\left(\tilde{u}_n^s\right)$$

となり, $G(u)$ の単調性から $u_n^{s+1} \leq \tilde{u}_n^{s+1}$ $(n \in \mathbb{Z}^d)$ が従い帰納法による証明が完了する.

この定理は第 1 節で仮定した $f(u), g(u)$ の形に依存しないものではあるが, もとの反応拡散方程式の比較原理と異なり, 方程式の形に仮定が入っていることに注意する. 実際に, 関数 $G(u)$ が

$$u_n^{s+1} = G\left(m\left(u_n^s\right)\right)$$

となっているからであり, $f(u)$, $g(u)$ の形次第ではこの定理の仮定が満たされないことも起こり得る. そこで, 本稿では $f(u)$, $g(u)$ の形ではなく差分刻み δ に条件を与えることでこの定理の仮定が満足されることを示す.

命題 3

$$\delta \leq \frac{1}{\displaystyle\max_{0 \leq u \leq 1} g'(u)}$$

であるとする. ただし, "$\prime$" で u による微分を表すとする. このとき,

$$G(u) := \frac{u + \delta f(u)}{1 + \delta g(u)}$$

は区間 $[0,1]$ において単調増加する.

証明

$G(u)$ を微分することにより,

$$\frac{dG}{du}(u) = \frac{1 + \delta\left(f' + g - ug'\right) + \delta^2\left(f'g - fg'\right)}{(1 + \delta g)}$$

が得られる. ただし, $f = f(u)$, $g = g(u)$ であるとする. このとき, $g > 0$, $C_k^m > 0$, $0 \leq u \leq 1$

より,

$$
\begin{aligned}
&1+\delta\left(f'+g-u\,g'\right)+\delta^2\left(f'g-fg'\right)\\
&\geq 1-\delta ug'+\delta f'+\delta^2\left[\left\{\sum_{k=0}^{\left[\frac{m-1}{2}\right]}(m-2k)C_{2k+1}^{m}u^{m-2k-1}\right\}\left(\sum_{k=0}^{\left[\frac{m}{2}\right]}C_{2k}^{m}u^{m-2k}\right)\right.\\
&\qquad\qquad\left.-\left(\sum_{k=0}^{\left[\frac{m-1}{2}\right]}C_{2k+1}^{m}u^{m-2k}\right)\left\{\sum_{k=0}^{\left[\frac{m}{2}\right]}(m-2k)C_{2k}^{m}u^{m-2k-1}\right\}\right]\\
&\geq 1-\delta u\,g'+\delta\left\{f'-\delta\,g'\left(\sum_{k=1}^{\left[\frac{m-1}{2}\right]}C_{2k+1}^{m}u^{m-2k}\right)\right\}\\
&\qquad\qquad+\delta^2C_1^mu^{m-1}\sum_{k=0}^{\left[\frac{m}{2}\right]}\left\{m-(m-2k)\right\}C_{2k}^{m}u^{m-2k}\\
&\geq 1-u+\delta\left\{mC_1^m+\sum_{k=1}^{\left[\frac{m-1}{2}\right]}C_{2k+1}^{m}(m-2k-u)u^{m-2k}\right\}\geq 0
\end{aligned}
$$

が得られるので, $\frac{dG}{du}(u)\geq 0$ が従い, 証明が完了する.

この命題は $G(u)$ が単調増加となる δ の十分条件を与えたことに注意する.

4　最後に

本稿では, これまでの研究で提案していた反応拡散方程式の離散化で得られた偏差分方程式に対して, 比較原理がどういった形であらわれるか議論した. その結果, 差分刻みに対する条件を与えることで比較原理が成り立つことが分かった. ただし, この条件は十分条件となっている. この結果はこの離散化を用いて数値計算を行う際に差分刻みをどの程度にするかの妥当性を与えるものでもある. また, 今回の結果は十分条件になっているので必要十分条件はどのようなものかは今後の検討課題でもある. 本稿では反応項が多項式の形をしたものに限定して議論したがそれ以外の関数形でも比較原理の離散類似がどういった条件で成立するかも今後の課題の一つであり, これらの課題が解決する結果が得られれば次の論文にまとめたい.

参考文献

[1] 柳田 英二, 『反応拡散方程式』, 東京大学出版会 (2015)

[2] 松家 敬介, 反応拡散系の減算のない離散化と平衡解の安定性について, 武蔵野大学数理工学センター紀要, **4** (2019), 50–58.

[3] T. Tokihiro, D. Takahashi, J. Matsukidaira, and J. Satsuma, From soliton equations to integrable cellular automata through a limiting procedure *Phys. Rev. Lett.* **76** (1996), 3247–3250.

[4] 広田 良吾, 高橋 大輔, 『差分と超離散』共立出版, (2003)

[5] D. Takahashi and J. Matsukidaira, Box and ball system with a carrier and ultradiscrete modified KdV equation *J. Phys. A,* **30** (1997), L733.

(原稿提出: 2021 年 1 月 13 日; 修正稿提出: 2021 年 2 月 6 日)