Hawkes過程モデルのノンパラメトリック推定による信用格付変更リスクの伝播性分析

Hawkes 過程モデルのノンパラメトリック推定による

信用格付変更リスクの伝播性分析

Analysis on contagious rating transitions with non-parametric

estimation of Hawkes process model

吉　野　諒[1]
Ryo Yoshino
佐々木　多希子[2]
Takiko Sasaki
山　中　卓[3]
Suguru Yamanaka

1. はじめに

銀行等の金融機関の経営管理では，与信先企業の信用格付が将来期間にどの程度変更し得るかという格付変更リスクを把握することがしばしば要請される．格付変更リスクを把握する手段の一つとして，信用格付変更の発生時点列を点過程とみなしてモデリングする手法が知られてきた．そこでは，ある企業の信用力の変化が他の企業の信用力にも影響を与えることを念頭に，そのような信用力の伝播性を表現できる点過程モデルである Hawkes 過程が用いられてきた．本稿では，ノンパラメトリックな手法によって Hawkes 過程モデルの推定を行い，信用格付変更の時間方向の伝播性の特徴を明らかにすることを試みる．

一般に，Hawkes 過程とは（単一あるいは複数のタイプの）イベントの累積発生件数をカウントする確率課程であり，イベント発生確率を特徴付ける「強度関数」に自己励起性（あるイベント発生によって同タイプのイベントの強度がジャンプする）や相互励起性（あるイベントの発生によって別のタイプのイベントの強度がジャンプする）といった性質を持っているのが特徴である．Hawkes 過程は集団内の伝染病の発生のモデルとして Hawkes(1971)によって提案された．このモデルは伝染性をもつ事象の分析に広

[1] 東京工業大学工学院経営工学系修士課程１年
[2] 茨城工業高等専門学校国際創造工学科助教
[3] 工学部数理工学科准教授

く用いられるようになり，金融分野のモデリングにおいても企業の信用格付変更のほか，株式取引時刻の分析にも援用されている．

山中等(2017)によれば，信用格付変更を含む信用イベントの分析に Hawkes 過程を適用した先行研究の多くでパラメトリックなモデルが仮定されてきた． 一方で，ノンパラメトリックな推定方法によって，データに「語らせる」形で信用イベントデータの特徴を明らかにすることを試みた研究はまだない．そこで本研究では Hawkes 過程モデルのノンパラメトリック推定を通して，信用イベント発生の伝播の特徴を把握することを試みる．

Hawkes 過程のノンパラメトリックな推定方法は，Bacry and Muzy (2014）や Bacry et al. (2016）で提案されている．田代・川口（2017）は Bacry and Muzy (2014）や Bacry et al. (2016)の方法を参考に，株式の取引時刻の分析を行った．本研究でも，これらの先行研究の方法を踏襲し，信用格付変更を対象とした Hawkes 過程モデルのノンパラメトリック推定を行う．

本稿の構成は以下になる．まず第 2 節で分析に用いるデータの概要を述べる．第 3 節で，Hawkes 過程の定式化とそのノンパラメトリック推定の手法についてまとめる．第 4 節で推定結果を紹介する．第 5 節でまとめと展望を述べる．

2. データ

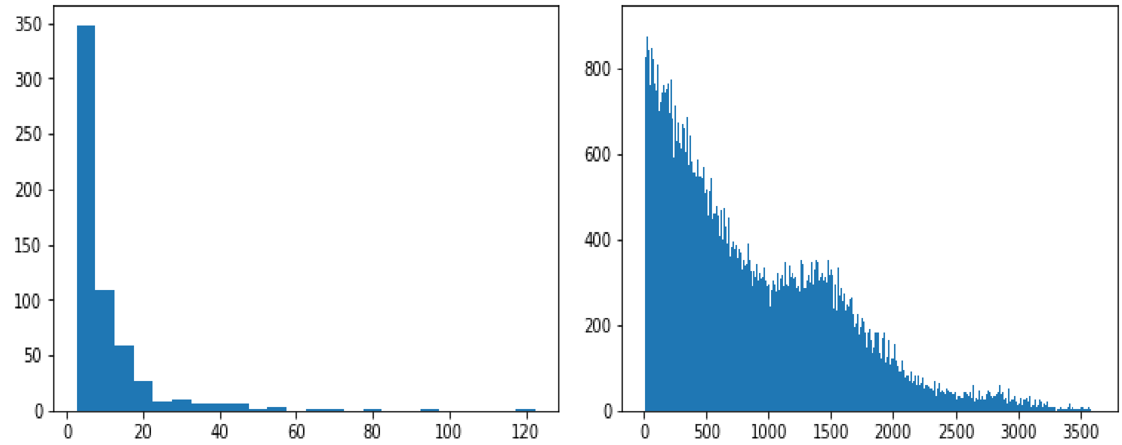
本稿では，格付機関 R&I が 1998 年 4 月 1 日～2013 年 3 月 29 日までに公表した 1380 件の信用格付の変更履歴を分析対象データとする．信用格付とは，発行体や発行体の債券等に対してその債務履行能力を AAA，AA，A，BBB， BB，B 等の記号で評価したものである．AAA が最高で上位になるほど信用力が高いことを示している．格付を行うのは「格付機関」と呼ばれる格付会社（レーティング・ファーム）で専門の民間企業である．格付会社は複数存在し日本では，金融庁の登録を受けた「信用格付業者」と呼ばれる企業が 7 社ある[4]．

本稿で分析対象とするデータは格付変更の種類と格付変更した期日が記録されているものである．今回の分析では「格上げ」，「格下げ」，「取下」の 3 種類の格付変更を対象とする．格付変更の種類別の発生件数をみてみると，格上げ発生件数は 407 件，格下げ発生件数は 637 件，取下発生件数は 336 件である．

格上げ，格下げ，取下のそれぞれについて格付変更の発生日から次の発生日，および全ての発生日までの間隔をグラフにしたものが図 3，4，5 である．これらのグラフの横軸は次の営業日までの間隔で，縦軸は件数である．

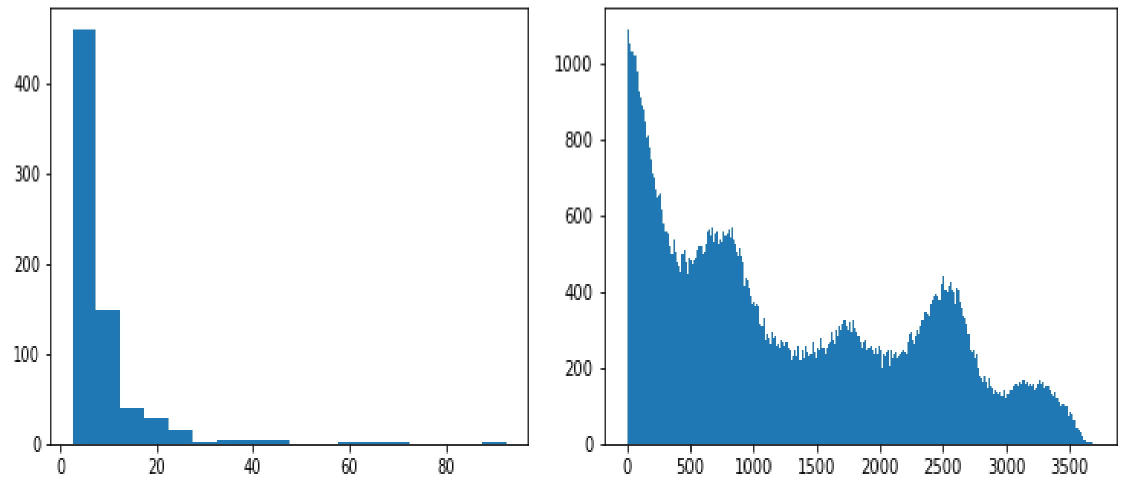
---

[4] 株式会社日本格付研究所（登録年月日平成 22 年 9 月 30 日），ムーディーズ・ジャパン株式会社(登録年月日平成 22 年 9 月 30 日)，ムーディーズ SF ジャパン株式会社（登録年月日平成 22 年 9 月 30 日)，S&P グローバル・レーティング・ジャパン株式会社（登録年月日平成 22 年 9 月 30 日)，株式会社格付投資情報センター(R&I) (登録年月日平成 22 年 9 月 30 日)，フィッチ・レーティングス・ジャパン株式会社（登録年月日平成 22 年 12 月 17 日)，S&P グローバル SF ジャパン株式会社（登録年月日平成 24 年 1 月 31 日）である．



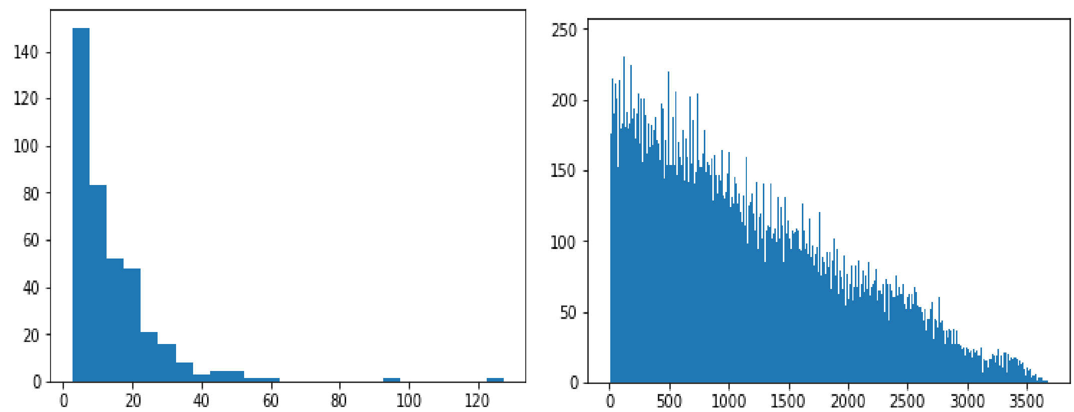
次の発生日までの間隔　　ある発生日から次以降の発生日までの間隔

図 3. 格上げ発生日の間隔



次の発生日までの間隔　　ある発生日から次以降の発生日までの間隔

図 4. 格下げ発生日の間隔



次の発生日までの間隔　　ある発生日から次以降の発生日までの間隔

図 5. 取下発生日の間隔

3. Hawkes 過程とそのノンパラメトリック推定

本節では Bacry and Muzy (2014) と田代・川口（2017）を参考に Hawkes 過程の定式化およびそのノンパラメトリック推定手法を述べる．

多次元 Hawkes 過程とは，格付変更別の格付変更の発生確率が他の格付変更の発生から受ける影響を表現可能な確率過程のことである．具体的には，D次元計数過程 $N_t = (N_t^i)_{1\le i\le D}$の強度関数$\lambda_t$が，任意の$i (1 \le i \le D)$について以下の式で表されるとき，$N_t$は$D$次元 Hawkes 過程と呼ばれる．

$$\lambda_t^i = \mu^i + \sum_{j=1}^{D} \int_{(-\infty,t)} \varphi^{ij}(t-s) dN_s^j$$

ここで，N_tは時刻 0 から tまでの格付変更の累積発生件数を意味している．また，$\mu = (\mu^i)_{1\le i\le D}$は$\mu^i \ge 0$を満たす定数のベクトルであり，$\varphi^{ij}(t)$は任意の正値可積分関数である．$\varphi = (\varphi^{ij})_{1\le i,j\le D}$は Hawkes カーネル行列と呼ばれる関数である．本稿においてDは格付変更の種類の総数であり$D = 3$である．また，$i = 1$は格上げ，$i = 2$は格下げ，$i = 3$は取下を表すこととする．

Hawkes 過程の強度関数λ_t^iは時刻 tにおける格付変更iの発生率をモデル化したものである．また，φ^{ij}は格付変更jが起きた後の格付変更iの発生確率の高まりやすさを表しており，格付変更iの発生強度λ_t^iが格付変更i以外の発生から受ける影響も表現できるモデルとなっている．

また，Bacry and Muzy(2014)では Hawkes 過程に付随する conditional law $g = \left(g^{ij}\right)_{1\le i,j\le D}$と呼ばれる量を以下のように定義した：

$$g^{ij}(t)dt = E\left[dN_t^i \middle| dN_0^j = 1\right] - 1_{\{i=j\}}\delta(t) - \Lambda^i dt.$$

ここで，$\Lambda^i = E\left[\lambda_t^i\right]$であり，$\delta(t)$はディラックのデルタ関数である．$g^{ij}$は格付変更$j$が 1 件発生した後の格付変更$i$の平均発生件数と格付変更$j$の発生を条件付けない場合の格付変更$i$の平均発生件数の差を意味する．そこでは，格付変更$i$自身の影響を考えないために$1_{\{i=j\}}\delta(t)$を差し引いている．

上式を見て分かるように，Hawkes 過程はカーネル関数の形をどのように与えるかで特徴付けられる．Bacry and Muzy (2014)では，以下の Wiener-Hopf 方程式

$$g(t) = \varphi(t) + (g * \varphi)(t) \qquad (1)$$

が唯一解φをもつことを示し，解φをカーネル行列とした強度関数をもつ Hawkes 過程を考えた．以下に，Bacry and Muzy (2016)を参考にして，(1) 式を用いてカーネルφの値をノンパラメトリックに推定する以下のアルゴリズムをまとめる：

(1) 線形補間のための時間刻みを以下のように定める

$$\{t_k\}_{1\le k\le K} = \{0, \delta T_1, 2\delta T_1, \cdots, (K-1)\delta T_1\} \qquad (2)$$

ここで，T_1, δは時間刻みのためのパラメータ，Kは$\{t_k\}$の要素数である．

(2) φ^{ij}は$[t_{k,}t_{k+1}]$は，以下のような区分的に線形な関数であるとする．

$$\varphi^{ij}(t) = \varphi^{ij}(t_k) + \frac{t-t_k}{t_{k+1}-t_k}\left(\varphi^{ij}(t_{k+1}) - \varphi^{ij}(t_k)\right)$$

各格付変更の発生時刻列$\{T_l^i\}_{l\le n_i}(1 \le i \le D)$を求め，$(i,j)$の各ペアに対し，定めた時間刻み毎に以下の式で$g$を推定する．

$$g^{ij}\left(\frac{t_k+t_{k+1}}{2}\right) \cong \frac{1}{t_{k+1}-t_k}\int_{t_k}^{t_{k+1}} g^{ij}(t)\,dt \cong \frac{1}{t_{k+1}-t_k}\frac{1}{n_j}\sum_{l=1}^{n_i}\sum_{m=1}^{n_j} 1_{T_l^i - T_m^j \in [t_k, t_{k+1})} - \Lambda^i$$

$$(k = 1,2,\ldots,K-1)$$

ここで，n_iは格付変更iの発生総件数である．Λ^iは格付変更iの発生件数の平均値で，n_iを総時間で割ることで得られる．格付変更i自身の影響を考えないためにΛ^iを差し引いている．また，上記式の時刻以外の$g^{ij}(t)$を線形補間で与える．さらに求めた$g^{ij}(t)$に対してスプライン平滑化を行う．

(3)　式(4.1)を離散化して得られる以下の φ に関する連立一次方程式を解き，t_nにおける φ の推定値を得る：

$$\begin{aligned} g^{ij}(t_n) &= \varphi^{ij}(t_n) + \sum_{m=1}^{D}\sum_{k=1}^{n-1}\varphi^{mj}(t_k)\int_{t_n-t_{k+1}}^{t_n-t_k} g^{im}(s)\,ds \\ &+ \sum_{m=1}^{D}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{\left(\varphi^{mj}(t_{k+1})-\varphi^{mj}(t_k)\right)(t_n-t_k)}{t_{k+1}-t_k}\int_{t_n-t_{k+1}}^{t_n-t_k} g^{im}(s)\,ds \\ &- \sum_{m=1}^{D}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{\varphi^{mj}(t_{k+1})-\varphi^{mj}(t_k)}{t_{k+1}-t_k}\int_{t_n-t_{k+1}}^{t_n-t_k} s g^{im}(s)\,ds, \quad (n = 1,2,\ldots,K). \end{aligned}$$

本稿では，上記の推定手法を踏襲してカーネル関数の値を推定する．今回の分析では時間単位 1 を 250 営業日とし，$T_1 = 1$とした．時間刻み$\{t_k\}$を決める式 (5.1)のパラメータについては，$\delta = 0.004$とする．また，同一時点の格付変更については今回の分析対象から外すために，発生推定手順(2)において$k = 1$のときにgの値は算出せず，φの推定にも用いないことにした．

4. 推定結果

本章では前章で述べたモデルの分析結果について述べる．

平均発生件数gの$0 \le t \le 1$，すなわちイベント発生から 1 年分のグラフを表したのが以下の図 7 である．ここで，「格上げ→格下げ」とは格上げが発生した後に格下げが起こる平均発生件数を示している．横軸は経過年数で縦軸は平均発生件数である．

まず図 7 のg^{11}，g^{22}，g^{33}のグラフをみると，gの値が概ね正の値をとっており，このこ

とから格上げ・格下げ・取下が起こった場合にそれぞれ同じタイプのイベントが起こりやすくなっていることがわかる．ただし，g^{33}については，$0.8 \leq t$においてgが負値になっており，取下発生から 9 か月程度経過するとその後の取下は起こりづらくなっていることが示唆される．また，g^{23}のグラフをみると，取下イベント発生直後はgの値は高く，時間の経過とともに逓減していっている．とくに，$t \leq 0.5$においてgは正の値をとり，$t \geq 0.5$から負値をとっており，取下が発生すると格下げも発生しやすくなること，またその影響は半年程度継続し，半年を経過するとむしろ格下げは発生しにくくなることが示唆される．

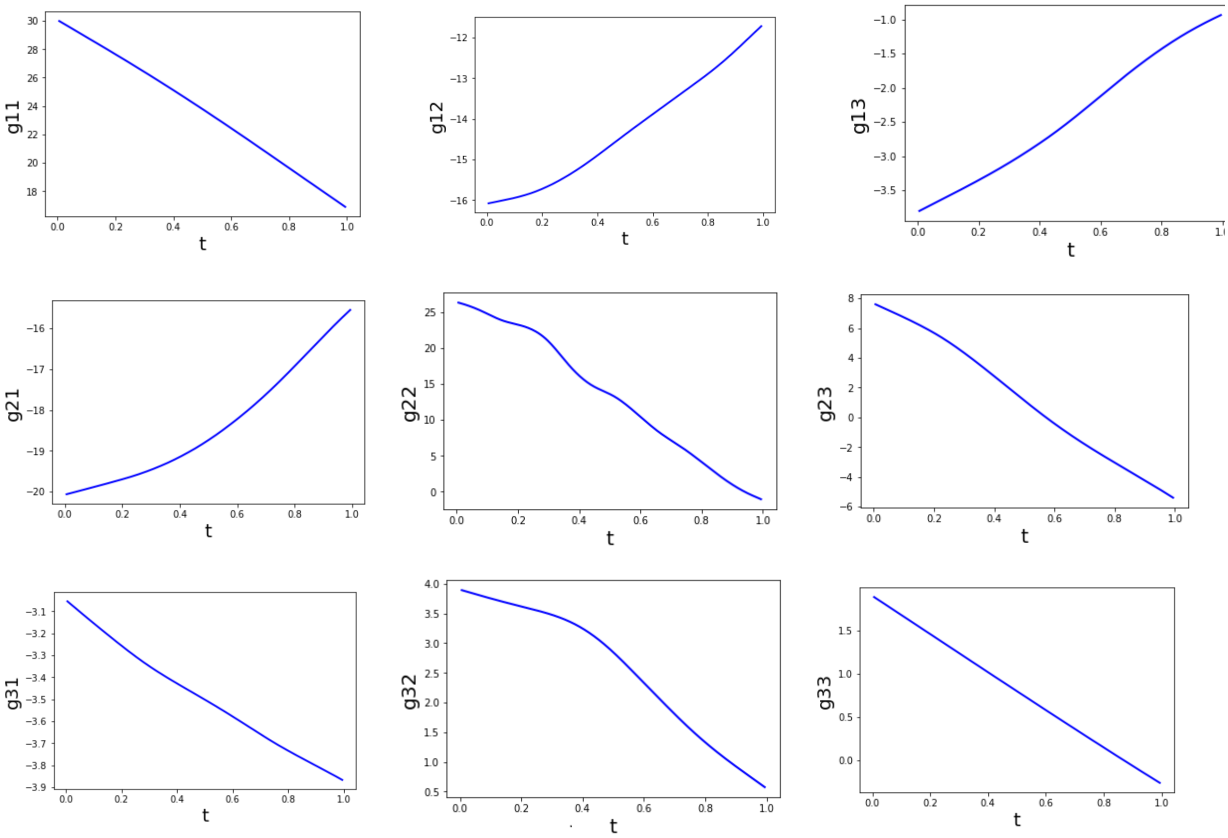


図 7: 推定された conditional law のグラフ．第i行第j列のグラフがg^{ij}を表す．横軸はイベント発生からの経過時間t.

次に，図 7 のg^{12}とg^{13}のグラフをみるとgの値が負の値をとっており，このことから格下げや取下が起こった場合に格上げが起こりづらくなる傾向がみてとれる．また，gの値は時間の経過とともに上昇しており，格下げや取下発生から時間が経つと格上げの起こりづらさは逓減していくこともわかる．同様に，g^{21}のグラフから格上げが起こった場合に格下げが起こりづらくなり，その程度は格上げ発生から時間が経過すると緩和されることがみてとれる．また，g^{31}のグラフから格上げが起こると取下が起こりづらくなることがわかるが，時間の経過とともにその影響が増大することが示唆された．素朴に考えると，信用イベント発生の影響は時間の経過とともに緩和される，すなわち，

gの絶対値は 0 に近づくことが予想されるが，g^{31}の形状はその素朴な予想と反する結果となっている．

Hawkes 過程では，$\varphi^{ij}(t)$は正の値をとる．だが，今回考えている問題の中には，格付変更が起きたことで，別の格付変更が出にくくなるケースも存在しうる．このような場合，$\varphi^{ij}(t)$はあるtにおいて負値を取る．図 8 は推定されたカーネル関数$\varphi^{ij}(t)$の形状を表しており，グラフの横軸は経過年数，縦軸はカーネル関数の値である．カーネル関数は格付変更jが起きた後の格付変更iの発生率の高まりを表しており，その値が正の場合（負の場合）には，格付変更jの発生によって格付変更iが発生しやすく（発生しにくく）なっていることを意味する．

先に述べたgの推定結果の解釈と同様に，格上げ・格下げ・取下が起こった場合にそれぞれ同じタイプのイベントが起こりやすくなっていること，また，格上げが起こった場合に格下げや取下は起こりづらくなる傾向が確認された．

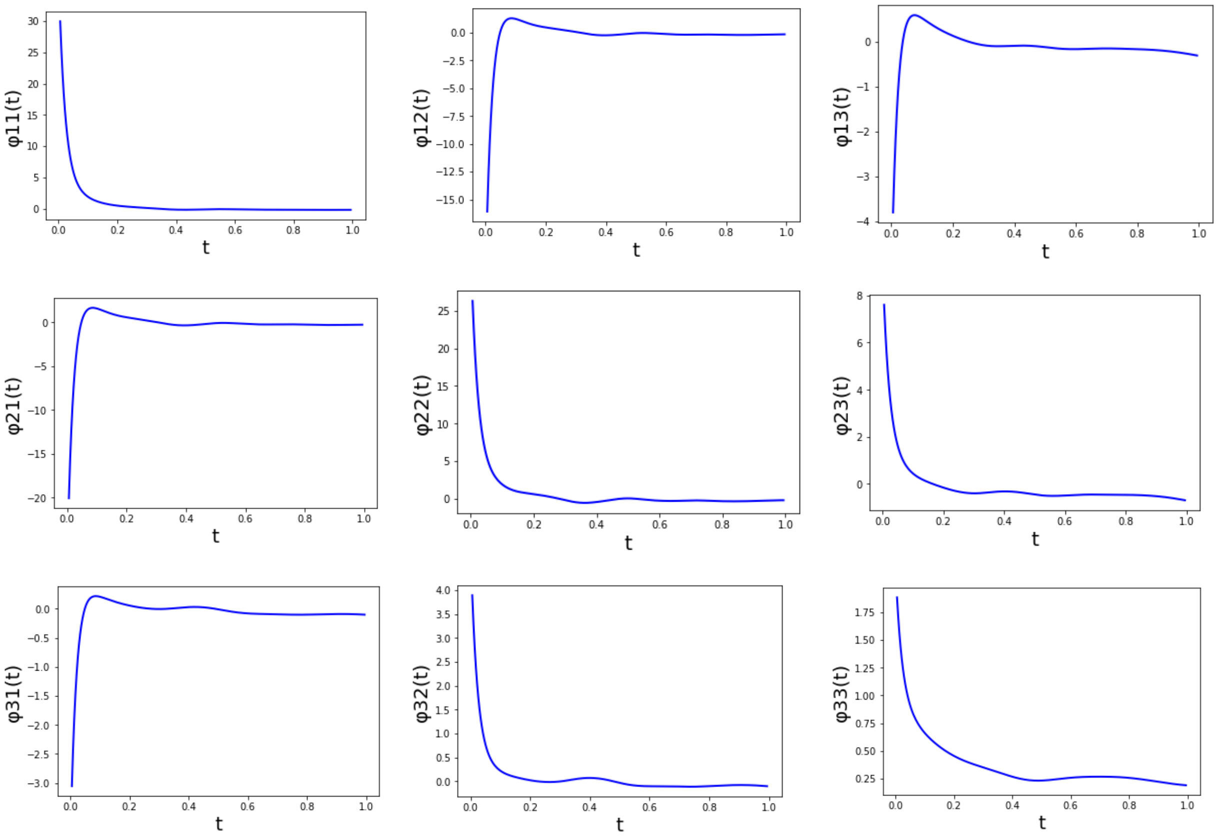


図 8: 推定された$\varphi^{ij}(t)$ のグラフ．第i行第j列のグラフが$\varphi^{ij}(t)$を表す．横軸はイベント発生からの経過時間t.

5. まとめ

本研究では，ノンパラメトリックな推定手法を用いて格付変更の特徴を考察した．Hawkes 過程の conditional law やカーネル関数の推定の結果，同種の信用イベント間（「格上げ→格上げ」，「格下げ→格下げ」，「取下→取下」）と類種のイベント間（「格下

げ→取下」）においては，イベント発生がその後のイベント発生率を高めることが確認された．またその影響は時間の経過とともに逓減していく傾向も確認された．また，イベントの意味が逆である二つのイベント間（「格上げ→格下げ」,「格上げ→格下げ」,「格下げ→格上げ」）においては，前者イベントが起こった直後は後者のイベントが発生しづらくなることが確認された．

これらの結果は同種のイベントの発生がイベント発生率を高めるという従来行われてきたパラメトリックな Hawkes 過程モデルの前提と整合的であり，これまでのモデリングを支持する一つの材料となったといえる．

参考文献

[1] 田代雄介, 川口宗紀 (2017)，東京証券取引所における高速な注文反応の分析，統計学会論文誌，第 10 巻，pp.41--78.

[2] 山中卓，中川秀敏，杉原正顯 (2017)，Hawkes 過程による信用リスク伝播のモデリングとその応用，応用数理，　第 27 巻 1 号, pp.5--12.

[2] Bacry, E. and Muzy, J. F. (2014). Second order statistics characterization of Hawkes processes and non-parametric estimation, Cornell University arXiv:1401.0903.

[3] Bacry, E., Jaisson, T. and Muzy, J. F. (2016). Estimation of slowly decreasing Hawkes kernels: Application to high-frequency order book modelling, Cornell University arXiv:1412.7096.

[4] Hawkes (1971), A.G.,Spectra of some self-exciting and mutually exciting point processes. Biometorika, vol.58(1), pp.83—90.

（原稿提出: 2020 年 1 月 4 日; 修正稿提出: 2020 年 2 月 10 日）