世界の幸せをカタチにする。
Creating Peace & Happiness for the World
Musashino University
武蔵野大学 学術機関リポジトリ
Musashino University Academic Institutional Repository

Discrete analouge of Duhamel’s principle

メタデータ	言語: jpn 出版者: 公開日: 2020-07-22 キーワード (Ja): キーワード (En): 作成者: 松家, 敬介 メールアドレス: 所属:
URL	https://mu.repo.nii.ac.jp/records/1296

Duhamel の原理の離散類似

Discrete analouge of Duhamel's principle

松 家 敬 介[1]
Keisuke Matsuya

概要

Duhamel の原理は斉次線形偏微分方程式の解から対応する非斉次線形偏微分方程式の解を得る手法として知られている．本稿では, 非斉次線形熱方程式から差分法で得られる差分方程式に対する Duhamel の原理の離散類似を述べ, さらに, 非斉次線形波動方程式から差分法で得られる差分方程式に対する Duhamel の原理の離散類似も与える.

1 はじめに

Duhamel の原理は斉次線形偏微分方程式の解から対応する非斉次線形偏微分方程式の解を得る手法として知られている．また, 線形偏微分方程式に限らず, 半線形偏微分方程式などに対しても, その解が満たす積分方程式を与える手法としても扱われ, この積分方程式が方程式の解の挙動を解析するために用いられている.

また, 微分方程式を計算機で計算するには, 微分方程式を何らかの形で離散化する必要がある．離散化の代表的な手法として差分法が挙げられる．差分法とは, 極限操作によって元の微分方程式が得られるような差分方程式を微分方程式から構成する手法である．差分法で得られた差分方程式は元の微分方程式と類似した性質をもつことが期待される．この様な背景から, 非斉次線形偏微分方程式を差分法で離散化して得られた差分方程式は Duhamel の原理の離散類似を満たすことが期待される．実際に, [1] では半線形熱方程式に対して Duhamel の原理の離散類似が用いられており, 偏微分方程式の場合 [2] と同様に方程式の解の解析に活用されている．そこで本稿では, 非斉次線形熱方程式から差分法で得られる差分方程式に対する Duhamel の原理の離散類似を述べる．これは, [1] で用いられているものと類するものである．さらに, 非斉次線形波動方程式から差分法で得られる差分方程式に対する Duhamel の原理の離散類似も与える.

本稿の構成は以下の通りである．第 2 節で非斉次の線形熱方程式および線形波動方程式の Duhamel の原理について紹介し, 第 3 節でそれぞれの方程式の差分法によって離散化した差分方程式とその Duhamel の原理の離散類似を与える．第 4 節では, Duhamel の原理の離散類似が成立することを証明し, 第 5 節で本稿の結論と今後の課題を述べる.

[1] 武蔵野大学数理工学センター員 / 武蔵野大学工学部数理工学科講師

2　線形の熱方程式および波動方程式の Duhamel の原理

本節では非斉次線形熱方程式の初期値問題:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial h}{\partial t}(t,x) = \Delta h(t,x) + f(t,x) & (t>0,\ x\in\mathbb{R}^d) \\ h(0,x) = a(x) & (x\in\mathbb{R}^d) \end{cases} \tag{1}$$

および非斉次線形波動方程式の初期値問題:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2}(t,x) = \Delta w(t,x) + g(t,x) & (t>0,\ x\in\mathbb{R}^d) \\ w(0,x) = a(x) & (x\in\mathbb{R}^d) \\ \dfrac{\partial w}{\partial t}(0,x) = b(x) & (x\in\mathbb{R}^d) \end{cases} \tag{2}$$

の Duhamel の原理を述べる．ただし, $d\in\mathbb{Z}_{>0}$ とし, Δ は d 次元ラプラシアンとする．

まず, (1) に対する Duhamel の原理 [3] は以下に挙げられるものである．

定理 1　$H(t,x)$ を

$$\begin{cases} \dfrac{\partial H}{\partial t}(t,x) = \Delta H(t,x) & (t>0,\ x\in\mathbb{R}^d) \\ H(0,x) = \delta(x) & (x\in\mathbb{R}^d) \end{cases}$$

の解とする．ただし, $\delta(x)$ は Dirac のデルタ関数とする．このとき,

$$h(t,x) = \int_{\mathbb{R}^d} H(t,x-y)a(y)dy + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} H(t-s,x-y)f(s,y)\,dyds$$

は (1) の解となる．

さらに, (2) に対する Duhamel の原理 [4] は以下に挙げられるものである．

定理 2　$W(t,x)$ を

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 W}{\partial t^2}(t,x) = \Delta W(t,x) & (t>0,\ x\in\mathbb{R}^d) \\ W(0,x) = 0 & (x\in\mathbb{R}^d) \\ \dfrac{\partial W}{\partial t}(0,x) = \delta(x) & (x\in\mathbb{R}^d) \end{cases}$$

の解とする．ただし, $\delta(x)$ は Dirac のデルタ関数とする．このとき,

$$\begin{aligned} w(t,x) = \int_{\mathbb{R}^d} \frac{\partial W}{\partial t}(t,x-y)a(y)dy + \int_{\mathbb{R}^d} W(t,x-y)b(y)dy \\ + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} H(t-s,x-y)f(s,y)\,dyds \end{aligned}$$

は (2) の解となる．

非斉次方程式の解が, それぞれ, 対応する斉次方程式に初期条件としてデルタ関数を与えた場合の解を用いた畳み込み積分で表されていることが分かる. 後述するが, Duhamel の原理の離散類似にもこの性質と類似したものがある.

3 Duhamel の原理の離散類似

本節では前節で挙げた Duhamel の原理の離散類似を述べる. はじめに, (1) および (2) を離散化した差分方程式を挙げる.

$$\begin{cases} h_n^{s+1} = \dfrac{1}{2d}\displaystyle\sum_{k=1}^{d}\left(h_{n+e_k}^s + h_{n-e_k}^s\right) + f_n^s & \left(s \in \mathbb{Z}_{\geq 0},\ n \in \mathbb{Z}^d\right) \\ h_n^0 = a_n & \left(n \in \mathbb{Z}^d\right) \end{cases} \tag{3}$$

$$\begin{cases} w_n^{s+1} + w_n^{s-1} = \dfrac{1}{d}\displaystyle\sum_{k=1}^{d}\left(w_{n+e_k}^s + w_{n-e_k}^s\right) + g_n^s & \left(s \in \mathbb{Z}_{\geq 0},\ n \in \mathbb{Z}^d\right) \\ w_n^0 = a_n & \left(n \in \mathbb{Z}^d\right) \\ w_n^1 = b_n & \left(n \in \mathbb{Z}^d\right) \end{cases} \tag{4}$$

ただし, $\delta > 0$ とし, $e_k \in \mathbb{Z}^d$ は第 k 成分が 1 で他は 0 のベクトルとする. (1) を離散化した差分方程式が (3) であり, (2) を離散化した差分方程式が (4) である. 実際に, (3) の場合, $\xi = \sqrt{2d\delta}$ とし, $t = \delta s,\ x = \xi n,\ h(\delta s, \xi n) = h_n^s,\ f(\delta s, \xi n) = f_n^s/\delta,\ a(\xi n) = a_n$ として, $\delta \to +0$ の極限をとれば (1) が得られる. 一方, (4) の場合, $\xi = \sqrt{d\delta}$ とし, $t = \delta s,\ x = \xi n,\ w(\delta s, \xi n) = w_n^s,\ g(\delta s, \xi n) = g_n^s/\delta,\ a(\xi n) = a_n,\ b(\xi n) = (b_n - a_n)/\delta$ として, $\delta \to +0$ の極限をとれば (2) が得られる. ただし, $f_n^s,\ g_n^s,\ b_n - a_n = O(\delta)\ (\delta \to 0)$ としている.

それでは, (3) および (4) に対する Duhamel の原理の離散類似を述べる. これらが本稿の主定理である.

定理 3 H_n^s を

$$\begin{cases} H_n^{s+1} = \dfrac{1}{2d}\displaystyle\sum_{k=1}^{d}\left(H_{n+e_k}^s + H_{n-e_k}^s\right) & \left(s \in \mathbb{Z}_{\geq 0},\ n \in \mathbb{Z}^d\right) \\ H_n^0 = \delta_{0,n} & \left(n \in \mathbb{Z}^d\right) \end{cases}$$

の解とする. ただし, $\delta_{0,n}$ は Kronecker のデルタ:

$$\delta_{0,n} = \begin{cases} 1 & (n = 0) \\ 0 & (n \neq 0) \end{cases}$$

とする. このとき,

$$h_n^s = \sum_{m \in \mathbb{Z}^d} H_{n-m}^s a_m + \sum_{r=0}^{s-1}\sum_{m \in \mathbb{Z}^d} H_{n-m}^{s-1-r} f_m^r$$

は (3) の解となる. ただし, r に関する和の項は $s = 0$ の場合は 0 とする.

定理 4 W_n^s を

$$\begin{cases} W_n^{s+1} + W_n^{s-1} = \dfrac{1}{d}\displaystyle\sum_{k=1}^{d}\left(W_{n+e_k}^s + W_{n-e_k}^s\right) & \left(s \in \mathbb{Z}_{\geq 0},\ n \in \mathbb{Z}^d\right) \\ W_n^0 = 0 & \left(n \in \mathbb{Z}^d\right) \\ W_n^1 = \delta_{0,n} & \left(n \in \mathbb{Z}^d\right) \end{cases}$$

の解とする．このとき,

$$w_n^s = \sum_{m\in\mathbb{Z}^d} W_{n-m}^s b_m - \sum_{m\in\mathbb{Z}^d} W_{n-m}^{s-1} a_m + \sum_{r=1}^{s-1}\sum_{m\in\mathbb{Z}^d} W_{n-m}^{s-r} g_m^r$$

は (4) の解となる．ただし, r に関する和の項は $s=0$ および $s=1$ の場合は 0 とする．

非斉次方程式の解が, それぞれ, 微分方程式の場合と同じように, 対応する斉次方程式の解を用いて表されていることが分かる．微分方程式との違いは, デルタ関数が Kronecker のデルタに変わっている点と畳み込み積分が畳み込み和分に変わっている点である．離散類似の場合, 超関数の扱いがなくなっている点が大きな違いといえる．次節でこれらの定理を証明する．

4 主定理の証明

- 定理 3 の証明

  初期条件および差分方程式が満たされていることを確認する．初期条件は

$$h_n^0 = \sum_{m\in\mathbb{Z}^d} H_{n-m}^0 a_m = a_n$$

  から満足されていることが分かる．さらに, 差分方程式を満たしていることは, $s \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ の場合,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2d}\sum_{k=1}^{d}\left(h_{n+e_k}^s + h_{n-e_k}^s\right) + f_n^s &= \frac{1}{2d}\sum_{k=1}^{d}\left\{\sum_{m\in\mathbb{Z}^d}\left(H_{n+e_k-m}^s + H_{n-e_k-m}^s\right)a_m \right. \\ &\qquad \left. + \sum_{r=0}^{s-1}\sum_{m\in\mathbb{Z}^d}\left(H_{n+e_k-m}^{s-1-r} + H_{n-e_k-m}^{s-1-r}\right)f_m^r\right\} + f_n^s \\ &= \sum_{m\in\mathbb{Z}^d} H_{n-m}^{s+1} a_m + \sum_{r=0}^{s-1}\sum_{m\in\mathbb{Z}^d} H_{n-m}^{s-r} f_m^r \\ &\qquad + \sum_{m\in\mathbb{Z}^d} H_{n-m}^0 f_m^s \\ &= \sum_{m\in\mathbb{Z}^d} H_{n-m}^{s+1} a_m + \sum_{r=0}^{s}\sum_{m\in\mathbb{Z}^d} H_{n-m}^{s-r} f_m^r = h_n^{s+1} \end{aligned}$$

  から分かり, 証明が完了する．

- 定理 4 の証明

  初期条件は

$$
\begin{aligned}
w_n^0 &= \sum_{m\in\mathbb{Z}^d} W_{n-m}^0 b_m - \sum_{m\in\mathbb{Z}^d} W_{n-m}^{-1} a_m = a_n \\
w_n^1 &= \sum_{m\in\mathbb{Z}^d} W_{n-m}^1 b_m - \sum_{m\in\mathbb{Z}^d} W_{n-m}^0 a_m = b_n
\end{aligned}
$$

  から満たされていることが分かる．ただし, W_n^s の定義から $W_n^{-1} = -\delta_{0,n}$ となることに注意する．さらに, 差分方程式を満たしていることは, $s \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ の場合,

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{d}\sum_{k=1}^{d}\left(w_{n+e_k}^s + w_{n-e_k}^s\right) + g_n^s \\
&= \frac{1}{d}\sum_{k=1}^{d}\left\{\sum_{m\in\mathbb{Z}^d}\left(W_{n+e_k-m}^s + W_{n-e_k-m}^s\right)b_m - \left(W_{n+e_k-m}^{s-1} + W_{n-e_k-m}^{s-1}\right)a_m \right. \\
&\qquad\qquad \left. + \sum_{r=1}^{s-1}\sum_{m\in\mathbb{Z}^d}\left(W_{n+e_k-m}^{s-r} + W_{n-e_k-m}^{s-r}\right)g_m^r\right\} + g_n^s \\
&= \sum_{m\in\mathbb{Z}^d}\left(W_{n-m}^{s+1} + W_{n-m}^{s-1}\right)b_m - \sum_{m\in\mathbb{Z}^d}\left(W_{n-m}^s + W_{n-m}^{s-2}\right)a_m \\
&\qquad + \sum_{r=0}^{s-1}\sum_{m\in\mathbb{Z}^d}\left(W_{n-m}^{s+1-r} + W_{n-m}^{s-1-r}\right)g_m^r + \sum_{m\in\mathbb{Z}^d} W_{n-m}^1 g_m^s \\
&= \sum_{m\in\mathbb{Z}^d} W_{n-m}^{s+1} b_m - \sum_{m\in\mathbb{Z}^d} W_{n-m}^s a_m + \sum_{r=1}^{s}\sum_{m\in\mathbb{Z}^d} W_{n-m}^{s+1-r} g_m^r \\
&\qquad + \sum_{m\in\mathbb{Z}^d} W_{n-m}^{s-1} b_m - \sum_{m\in\mathbb{Z}^d} W_{n-m}^{s-2} a_m + \sum_{r=1}^{s-2}\sum_{m\in\mathbb{Z}^d} W_{n-m}^{s-1-r} g_m^r \\
&= w_n^{s+1} + w_n^{s-1}
\end{aligned}
$$

  から分かり, 証明が完了する．

5 最後に

本稿では非斉次の線形熱方程式および線形波動方程式から差分法で得られた差分方程式が満たす Duhamel の原理の離散類似を与えた．Duhamel の原理は非斉次線形偏微分方程式のみならず半線形な偏微分方程式の解の解析にも有用である．これは非線形項を非斉次項と見なすことで, Duhamel の原理から方程式が満たす積分方程式を得ることができるからである．実際に, 爆発解をもつような半線形方程式に対して Duhamel の原理から得られた積分方程式から方程式の解の評価を行っている例もある [2, 5]．著者は, 爆発解をもつ偏微分方程式の解の構造を保った離散化に興味をもっており, 特に半線形の波動方程式に対して爆発解が存在する条件

に関する定理の離散類似を得ることに強い興味をもっている. [1] で Duhamel の離散類似が半線形熱方程式を差分法によって離散化して得られた差分方程式の解の解析に対して, 微分方程式の場合 [2] と同じ様に役立っており, 今回与えた非斉次の線形波動方程式から差分法で得られた差分方程式が満たす Duhamel の原理の離散類似も [5] にあるような半線形の波動方程式に対して爆発解が存在する条件に関する定理の離散類似を得るために有効な手掛かりとなることを著者は期待している. 今後, この様な離散類似が得られた場合は, 次の論文としてまとめたいと考えている.

参考文献

[1] K. Matsuya and T. Tokihiro, Existence and non-existence of global solutions for a discrete semilinear heat equation, *Discrete Contin. Dynam. Systems* 31(2011), 209–220.

[2] F. B. Weissler, Existence and nonexistence of global solutions for a semilinear heat equation, *Israel J. Math.* 38(1981), 29–40.

[3] Lawrence C. Evans, Partial Differential Equations, American Mathmematical Society, 2010, 2nd ed.

[4] 金子 晃, 偏微分方程式入門, 東大出版会, 1998.

[5] F. John, Blow-up of solutions of nonlinear wave equations in three space dimensions, *Manuscripta Math.* 28(1980), 235–268.

(原稿提出: 2019 年 12 月 31 日; 修正稿提出: 2020 年 2 月 3 日)