

## An exact travelling wave solution of Fuzzy ECA90

メタデータ	言語: jpn 出版者: 公開日: 2020-07-22 キーワード (Ja): キーワード (En): 作成者: 松野, 里穂, 薩摩, 順吉 メールアドレス: 所属:
URL	<a href="https://mu.repo.nii.ac.jp/records/1295">https://mu.repo.nii.ac.jp/records/1295</a>

# ファジー ECA90 の厳密な進行波解

## An exact travelling wave solution of Fuzzy ECA90

松野里穂<sup>1</sup>

Satoho Matsuno

薩摩順吉<sup>2</sup>

Junkichi Satsuma

### 概要

Wolfram の基本セルオートマトン 90 の従属変数  $0, 1$  を  $0 \leq u \leq 1$  に拡張した非線形差分方程式であるファジー ECA90 の解について考察を加える。数値的に得られたいくつかの解について、その構造を議論するとともに、2つのパラメータを含む厳密な進行波解が存在することを示す。

## 1 はじめに

Wolfram が体系的に研究した基本セルオートマトン (ECA; elementary cellular automaton) は、ある点と 2 近傍の点のみの値で次の時刻のある点の値が定まり、その値は 0 か 1 のどちらかである簡単な時間発展システムである。彼は 256 種類の ECA を、すべて 0 か 1 の一様な状態にたどりつくクラス 1、1 の領域と 0 の領域が分離した定常パターンにたどりつくクラス 2、三角波がカオス的に生成消滅するクラス 3、1 あるいは 0 の領域が時間とともに枝のように伸びるクラス 4 の 4 つのクラスに分類した [1]。

ECA で変数のとる値を  $0 \leq u \leq 1$  の曖昧な値に拡張したものをファジー ECA という。Mingarelli は 256 種類すべての ECA に対応するファジー ECA を提出した [2]。それらは非線形差分方程式で、2次もしくは3次の非線形項をもった時間発展形になっている。

本論文では ECA90 に対応するファジー ECA

$$u(x, t + \Delta t) = u(x - \Delta x, t) + u(x + \Delta x, t) - 2u(x - \Delta x, t)u(x + \Delta x, t) \quad (1)$$

の解について考察を加える。ECA90 は、Wolfram の分類でクラス 3 に属するもので、一点で 1、その他の点で 0 の初期値を与え時間発展させたとき、シェルピンスキーのギャスケットと呼ばれるフラクタル構造の解をもつことが知られている。

論文の構成は以下のとおりである。まず第 2 章で、方程式のもつ定数解についてコメントした後、局在化したパルス型の初期条件と、左右の境界条件が異なる衝撃波型の初期条件を与えた場合の解の挙動を数値的に調べ、その性質について議論する。続いて第 3 章で、数値計算で予想される衝撃波型の定常解について、2つのパラメータを含む厳密な進行波解が存在するこ

<sup>1</sup> 武蔵野大学工学部数理工学科 B4

<sup>2</sup> 武蔵野大学工学部数理工学科 教授 / 武蔵野大学数理工学センター長

と解析的に示す。第 4 章では、非線形差分方程式 (1) と簡単な変数変換で結びつく他のファジー ECA について議論した後、関連する非線形方程式群が線形化されることを指摘する。最後に、第 5 章では結語を述べる。

## 2 ファジー ECA90 の数値解

表記を簡単にするため、以下  $\hat{u} = u(x, t + \Delta t)$ ,  $\underline{u} = u(x - \Delta x, t)$ ,  $\bar{u} = u(x + \Delta x, t)$  という記号を導入する。すると、ファジー ECA90 (1) は

$$\hat{u} = \underline{u} + \bar{u} - 2u\bar{u} \quad (2)$$

と書き換えることができる。非線形差分方程式 (2) の定数解を求めよう。そのためには、 $u = \underline{u} + \bar{u} - 2u^2$  の 2 次方程式を解けばよく、 $u = 0, \frac{1}{2}$  が定数解であることがたちどころにわかる。

ここで、2 つの定数解の線形安定性について触れておく。まず、解  $u = 0$  については、(2) において、線形項だけを残すと、

$$\hat{u} = \underline{u} + \bar{u} \quad (3)$$

となり、簡単な計算から  $u = 0$  は不安定であることがわかる。以下、この定数解を不安定解と呼ぶことにする。

次に、 $u = \frac{1}{2}$  について考える。(1) 式において  $u = \frac{1}{2} + \varepsilon$  を代入し、 $\varepsilon$  の 1 次の項のみを残すと、 $\hat{\varepsilon} = 0$  を得る。すなわち、線形安定性の意味で、 $u$  の値は  $\frac{1}{2}$  からずれないことになる。そこで、 $u = \frac{1}{2}$  を安定解と呼ぶことにする。

このことをふまえて、初期条件として局在化したパルス型と、左右の境界条件が異なる衝撃波型の場合の 2 通りの数値計算を行う。まず、初期条件が 0 と 1 を含まないパルス型の数値計算の一例を図 1 に示す。初期値を 1 点だけ 0.9 で他はすべて 0.1 として時間発展させると、図のように振動しながら安定解  $\frac{1}{2}$  に移行する。初期値を 1 点だけ  $0 \leq u \leq 1$  の範囲にある値を与え、他はすべてその値と異なる  $0 \leq u \leq 1$  の範囲の値を与えて時間発展させても、同様の結果が得られる。すなわち、そうした条件を満たすパルスは減衰して、安定な定数解  $\frac{1}{2}$  に収束する。

次に、初期条件が 0 か 1 を含むパルス型の数値計算を行う。初期値を 1 点だけ 0.9 で他はすべて 0 として時間発展させると、図 2 のように交互に 0 と 0 以外の値をとる振動状態が生じ、安定解  $\frac{1}{2}$  と不安定解 0 を交互にとりながら徐々に広がっていく。ただし、両端では 0.9 が保存される。初期値を 1 点だけ  $0 \leq u \leq 1$  の範囲にある適当な値を与え、他はすべて 0 としても同様の結果が得られる。また、初期値を 1 点だけ  $0 \leq u \leq 1$  の範囲にある適当な値を与え、他はすべて 1 とすると、たちどころに 1 は 0 となり、以降図 2 と同様の挙動を示す。この結果から、初期値に 0 と 1 を含む場合は、フラクタル的な解をもつ ECA90 の構造を強く反映していると考えられる。

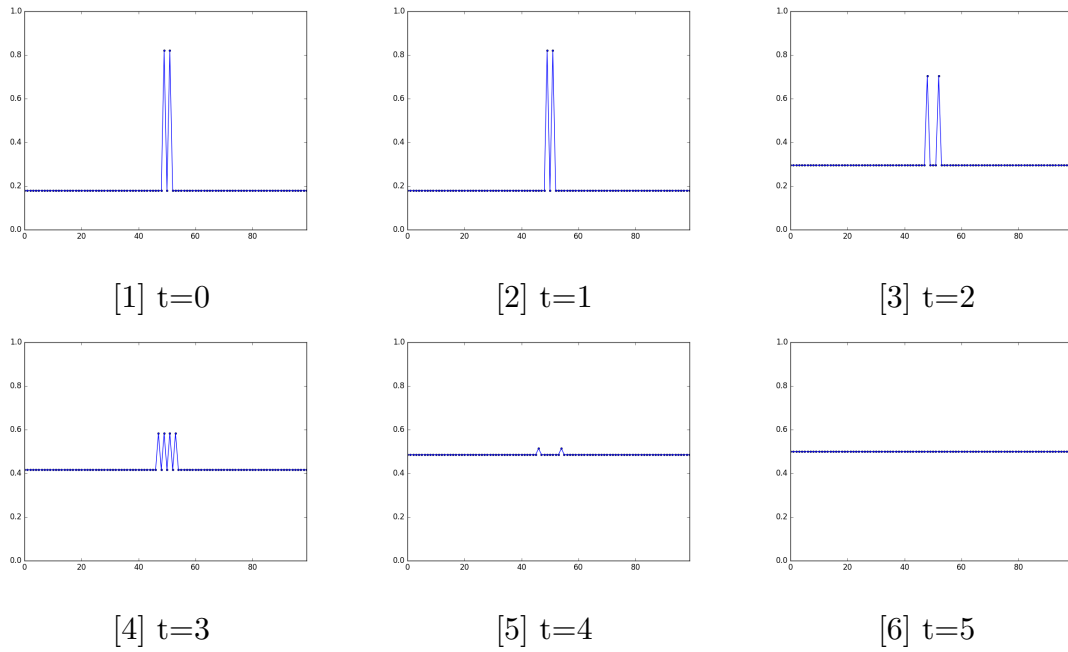


図 1 1点だけ 0.9 (他は 0.1) のパルス型の初期値に対する時間発展

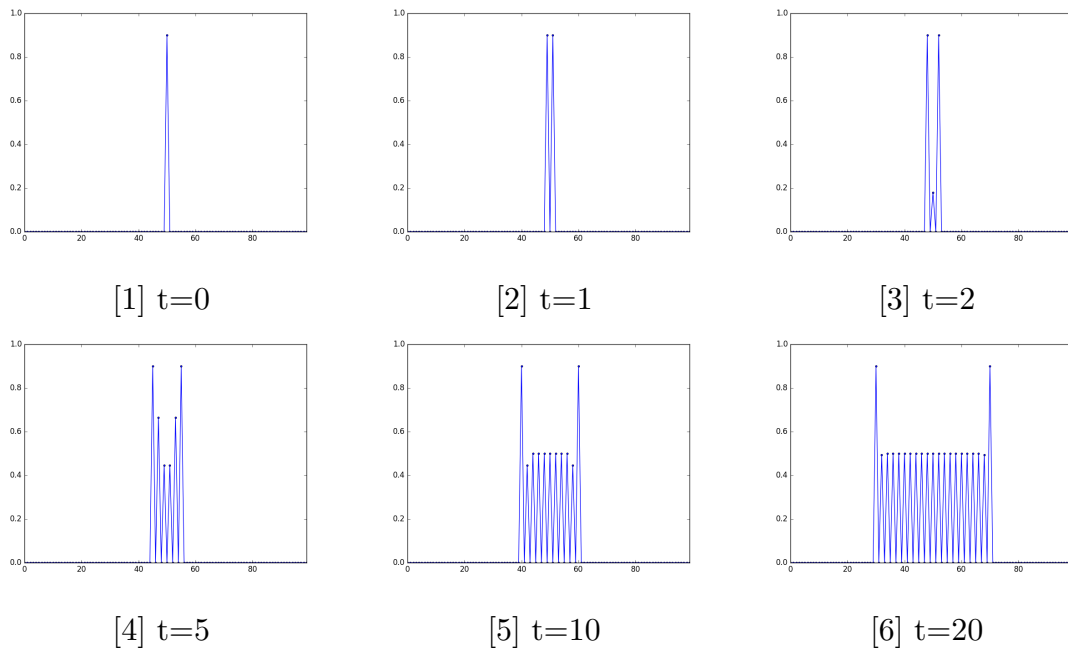


図 2 1点だけ 0.9 (他は 0) のパルス型の初期値に対する時間発展

今度は、衝撃波型の初期値に対する数値計算を行う。まず、左方では 0.1、中心の 1 点だけが 0.5、その後右方はすべて 0.9 とした初期値を考える。以降、このような初期値を  $(\dots, 0.1, 0.1, 0.1, 0.5, 0.9, 0.9, 0.9, \dots)$  と表すことにする。この初期値に対する解の時間発展は図 3 のように、すぐに左右の値が等しくなり初期値の衝撃波の界面部分が振動しながら安定解  $\frac{1}{2}$  に移行する。初期値を左方で  $0 \leq u \leq 1$  の範囲にある適当な値を与え、衝撃波の界面である値、右方で  $0 \leq u \leq 1$  の範囲の左方と異なる値を与えても、図 3 と同様、時間の経過とともに安定解  $\frac{1}{2}$  に移行する。

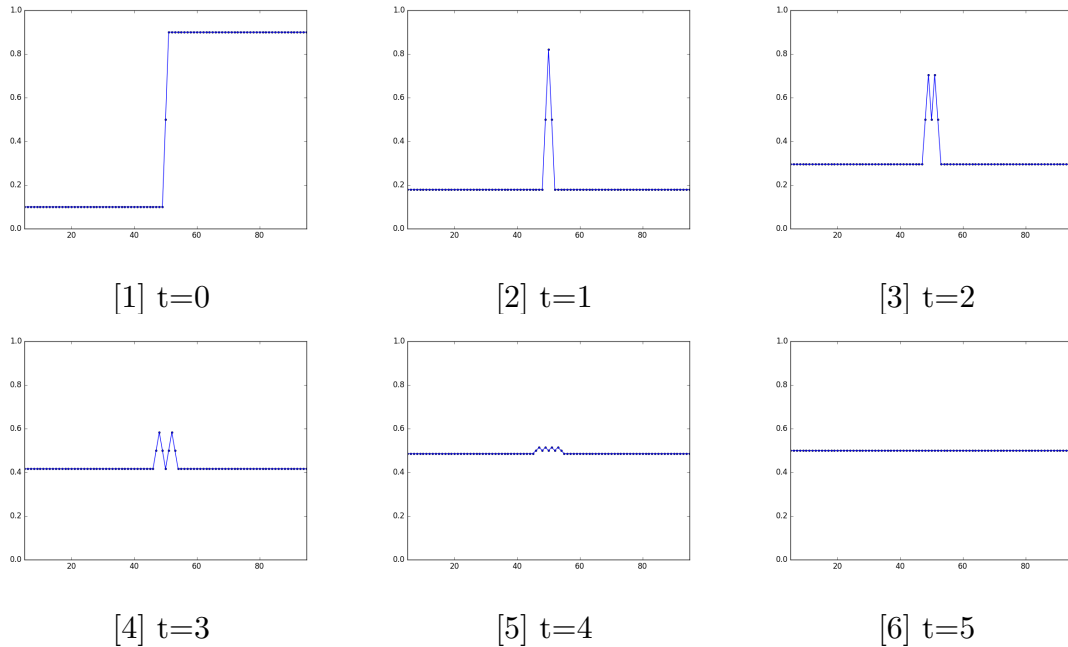


図 3  $(\dots, 0.1, 0.1, 0.1, 0.5, 0.9, 0.9, 0.9, \dots)$  の衝撃波型の初期値に対する時間発展

次に、初期条件が 0 か 1 を含む衝撃波型の初期値に対する数値計算を行う。初期値を  $(\dots, 0, 0, 0, 0.5, 0.9, 0.9, 0.9, \dots)$  とする。時間発展させると、図 4 のように右方の大きい方の値 0.9 が減少し、振動しながら安定解  $\frac{1}{2}$  に近づいていく。その振動の振幅も時間と共に小さくなっていき、十分時間がたつと、1 点だけ 0.9 を残して左向きに速さ 1 で移動する定常進行波解になる。逆に、初期値を  $(\dots, 0.9, 0.9, 0.9, 0.5, 0, 0, 0, \dots)$  として数値計算を行うと、図 4 と逆向きに移動する定常進行波解が現れる。なお、この事実は差分方程式 (2) のもつ空間対称性を考慮すると十分予想されることである。

初期値を  $(\dots, 0.1, 0.1, 0.1, 0.5, 1, 1, 1, \dots)$  として数値計算を行うと、パルス型の場合と同様、1 はただちに 0 となり、その後左方の 0.1 は徐々に増加して、安定解  $\frac{1}{2}$  に近づいていく。そして十分時間がたつと、 $(\dots, 0.5, 0.5, 0.5, 0.9, 1, 1, 1, \dots)$  の形の界面の 1 点だけ 0.9 を残して左向きに速さ 1 で移動する定常進行波解になる。

興味ある結果は、定常進行波解の存在である。じつは、ファジー ECA90 は 2 つの自由パラメータをもった定常進行波解を有することがわかった。次章でその発見の経緯を示すこととする。

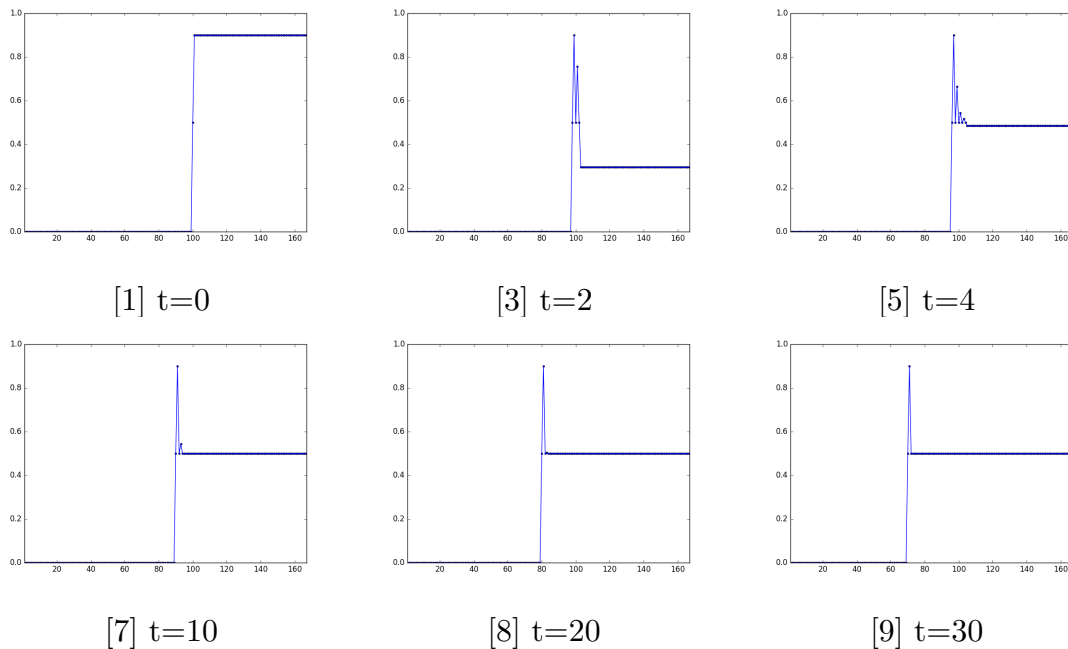


図4  $(\dots, 0, 0, 0, 0.5, 0.9, 0.9, 0.9, \dots)$  の衝撃波型の初期値に対する時間発展

### 3 定常進行波解

前章で調べた初期条件が 0 か 1 を含む衝撃波型の初期値問題では、図 4 で見たように、十分時間がたつと、不安定な定数解 0 と安定な定数解  $\frac{1}{2}$  をつなぎ、界面である値をとる速さ 1 の定常進行波解が得られた。そこで、0 と  $\frac{1}{2}$  をつなぎ、界面でいくつかの値をとる衝撃波型の初期値を与えて数値計算を行う。

図 5 は、初期値を  $(\dots, 0, 0, 0, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.5, 0.5, \dots)$  としたときの計算結果である。衝撃波の界面にある 3 つの点 0.2, 0.3, 0.4 のうち、安定な定数解 0.5 に最も場所が近い 0.4 は時間の経過とともに、0.5 に吸収されるが、他の 2 点はそのままの値を保ったまま定常な衝撃波として進行する。すなわち、界面で 0 と 0.5 と異なる 2 つの値をもつ定常進行波解が存在するのである。

以下で、定数解 0 と 0.5 をつなぎ、界面で  $0 \leq u \leq 1$  の範囲の 2 つの任意パラメータをもつ定常衝撃波型進行波解が存在することを厳密に示すことにする。いま、 $t = 0$  で  $u$  に対して

$$t = 0 \quad \dots, 0, 0, 0, a, b, 0.5, 0.5, 0.5, \dots$$

を与えたとしよう。ただし  $a, b$  は  $0 \leq a, b \leq 1$  を満たす任意定数である。式 (2) にこれらの値を代入すると、次の時刻  $t = 1$  で

$$t = 1 \quad \dots, 0, 0, a, b, 0.5, 0.5, 0.5, 0.5, \dots$$

となることが容易にわかる。。 $t = 1$  の状態は  $t = 0$  の状態が左に 1 シフトしたものになってい

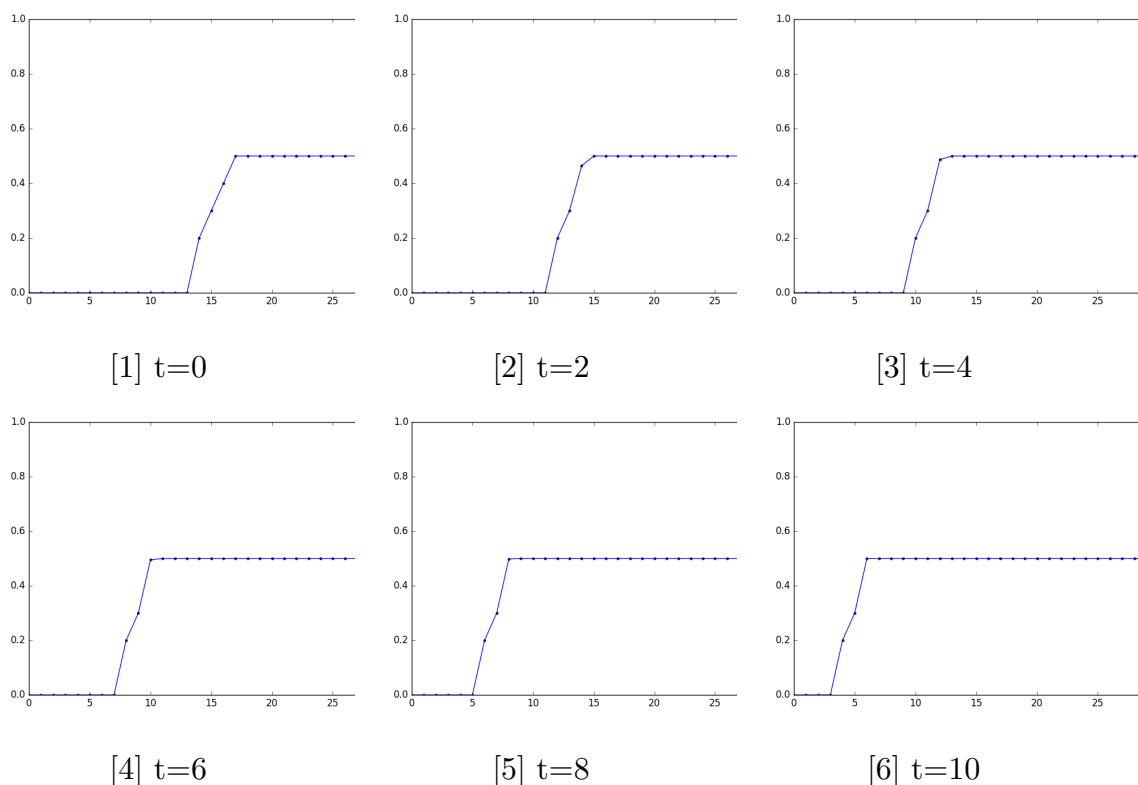


図 5 (… , 0, 0, 0, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.5, 0.5, …) の衝撃波型の初期値に対する時間発展

る。以降の時刻でもまったく同様である。すなわち、厳密解として  $0$  と  $\frac{1}{2}$  を結び、界面で任意の値  $a, b$  をとる速さ  $1$  の衝撃波型進行波解が存在することが分かった。

## 4 他のファジー ECA との関連

ファジー ECA90 の式 (2) に対して、 $\alpha$  を任意定数として、 $u = \frac{1}{2}(1 - v)$  という変数変換を施すと、

$$\hat{v} = v\bar{v} \tag{4}$$

が得られる。この式はファジー ECA160 に対する差分方程式である。上式で、さらに、 $\alpha$  を任意定数として、 $v = 1 - \alpha w$  という変数変換を行うと、

$$\hat{w} = w + \bar{w} - \alpha w\bar{w} \tag{5}$$

を得る。式 (5) は  $\alpha$  が  $2$  のときはファジー ECA90 に対する差分方程式そのものであるが、 $\alpha$  が  $1$  のときはファジー ECA250 に対する差分方程式

$$\hat{w} = w + \bar{w} - w\bar{w} \tag{6}$$

を与える。

Wolfram の分類によれば、ECA160 はクラス 1 に属し、ランダムな初期値を与えたとき、

解はすべて 0 の一様な状態にたどりつく。また、ECA250 の解は ECA160 の解の 0 と 1 を反転させたものになる。両者ともクラス 3 に属す ECA90 の解と構造が異なることを注意する。

しかしながら、ファジー ECA については、ファジー ECA160 もファジー ECA250 とともに、ファジー ECA90 と同様の衝撃波型の定常進行波解をもつことを指摘しておきたい。ファジー ECA160 に対する差分方程式 (4) に対して、初期値として  $v = (\dots, 0, 0, 0, A, B, 1, 1, 1, \dots)$  を与えると、

$$\begin{aligned} t = 0 & \dots, 0, 0, 0, A, B, 1, 1, 1, \dots \\ t = 1 & \dots, 0, 0, 0, 0, A, B, 1, 1, \dots \\ & \vdots \end{aligned}$$

のように時間発展する。すなわち、ファジー ECA90 と同様に 0 と 1 をつなぎ、界面で任意の値  $A, B$  をとる速さ 1 の衝撃波型進行波解が存在する。

ファジー ECA250 に対する式 (6) も同様である。初期値  $w = (\dots, 1, 1, 1, C, D, 0, 0, 0, \dots)$  を与えると、

$$\begin{aligned} t = 0 & \dots, 1, 1, 1, C, D, 0, 0, 0, \dots \\ t = 1 & \dots, 1, 1, 1, 1, C, D, 0, 0, \dots \\ & \vdots \end{aligned}$$

のように時間発展する。やはり、0 と 1 をつなぎ、界面で任意の値  $C, D$  をとる速さ 1 の衝撃波型進行波解が存在する。

最後に、これらのファジー ECA の差分方程式は線形化可能であることを指摘しておく。たとえば、式 (4) において、両辺対数を取り、 $\phi = \log v$  と変換すると、線形差分方程式  $\hat{\phi} = \underline{\phi} + \bar{\phi}$  が得られる。

## 5 結語

本論文では、ファジー ECA90 に対応する非線形差分方程式の解を、数值的、解析的に調べた。パルス型の初期値の場合、初期値が 0 と 1 を含まない場合は急速に  $\frac{1}{2}$  に収束するが、0 か 1 を含む場合には、ECA90 の解のように、安定解  $\frac{1}{2}$  と不安定解 0 を交互にとりながら広がっていくことがわかった。衝撃波型の初期値の場合、初期値が 0 と 1 を含まないときはやはり急速に  $\frac{1}{2}$  に収束するが、0 か 1 を含む場合には、定常な進行波解が存在することが明らかになった。とくに、定数解 0 と 0.5 をつなぎ、界面で  $0 \leq u \leq 1$  の範囲にある 2 つの任意パラメータをもつ厳密な定常衝撃波型進行波解が存在することは興味ある事実であると考えられる。

ファジー ECA90 は簡単な変数変換でファジー ECA160 やファジー ECA250 と結びつくことを指摘したが、その結果から、後者の差分方程式も前者同様、2 つの任意パラメータを含む厳密な定常衝撃波型進行波をもつことがわかった。Wolfram の分類によれば、ECA160 と ECA250 はクラス 1 に、ECA90 はクラス 3 に属するものである。ECA のレベルでは解の構



造がかなり異なるにもかかわらず、ファジー ECA のレベルではなぜ 2 つの任意パラメータを含む同種の定常進行波解をもつかを調べるのは今後の課題の一つである。

また、これらのファジー ECA は線形化可能であることを示した。このことを用いて非線形差分方程式の連続近似を考え、離散系と連続系の解、とくに定常進行波解の関連を考察するのも今後の課題である。

## 参考文献

- [1] Stephen Wolfram, Theory and Applications of Cellular Automata, World Scientific (1986).
- [2] A. Mingarelli, A classification scheme for fuzzy cellular automata with applications to ECA, Journal of Cellular Automata **5**, 445-467 (2010).

(原稿提出: 2020 年 2 月 10 日; 修正稿提出: 2020 年 2 月 10 日)