

## Orientation of Long Satellites under Gravity Gradient

メタデータ	言語: jpn 出版者: 公開日: 2019-08-22 キーワード (Ja): キーワード (En): 作成者: 阿部, 修治 メールアドレス: 所属:
URL	<a href="https://mu.repo.nii.ac.jp/records/1086">https://mu.repo.nii.ac.jp/records/1086</a>

# 重力勾配下の長尺衛星の配向

## Orientation of Long Satellites under Gravity Gradient

阿部 修治<sup>1</sup>

Shuji Abe

### 概要

地球などの重力中心のまわりの軌道を周回する長尺な物体（人工衛星）は、重力勾配によって、常に長尺方向を重力中心に向けるような配向が安定化し、自転が公転と同期する。このような物体がこれとは異なる非同期自転する場合の重力勾配の影響について分析し、特に、自転せず方位を固定した配向をとることが可能かどうかを検討した。その結果、一方向の小さな振動を伴いながら、一定方向を向く配向は可能であることが分ったが、長時間のうちには振動が2次元方向に動いていくため、この配向を自律的に維持することは難しい。宇宙太陽光発電構想との関連について議論する。

### 1. はじめに

地球の静止衛星軌道上で、大面積の太陽電池パネルで発電し、地上にマイクロ波で送電するという宇宙太陽光発電の構想がある[1,2]。大面積の送電アンテナを地球に向けるため、図1のようなテザー構造にして安定化させる方法が考えられている。

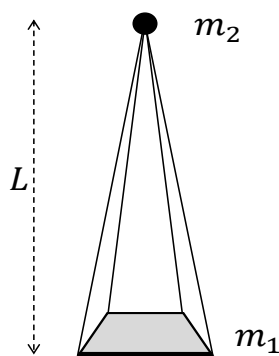


図1. テザー型衛星

平面型の本体（質量  $m_1$ ）を長いワイヤーで対抗質量（ $m_2$ ）と結んだもの

地球などの重力中心のまわりを周回する物体（人工衛星）が長い形状のとき（以下、長尺という）、重力勾配によって、常に長尺方向を重力中心に向けるような配向が安定化する（このとき自転が公転と同期している）[3]。これを図示したのが図2(a)である。重力勾配の効果とは、重力の大きさが距離 $r$ とともに変化する（ $\propto r^{-2}$ ）ことにより、物体に回転のトルクがはたらくことである[4]。また、衛星が角速度 $\omega$ で公転しているときのみかけの遠心力の大きさが距離 $r$ とともに増加する（ $\propto r\omega^2$ ）効果も加わり、上記のよ

<sup>1</sup> 武蔵野大学数理工学センター員 / 武蔵野大学工学部数理工学科特任教授

うな安定な配向が生じる．地球の衛星である月が常に同じ面を地球に向けているのも，月が完全な球形ではなく，一つの方にわずかに長い楕円体であるためである．

一方，太陽光発電の目的には大面積の太陽電池の面を太陽に向ける必要があり，図 2

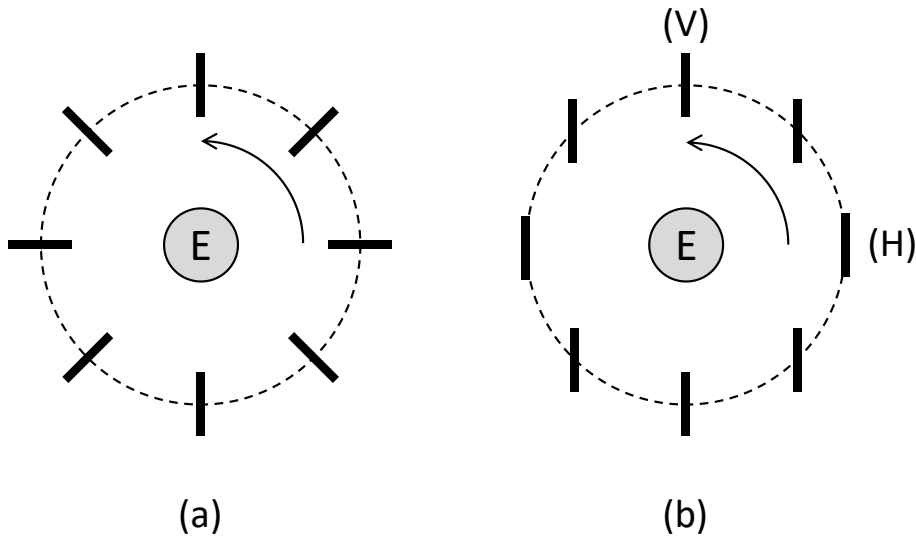


図 2. 重力中心(E)のまわりを周回する長尺物体の(a)同期安定配向; (b)方位固定配向

(b)のように一定の方向に向ける，つまり絶対座標から見て一定の方位に固定した配向のまま周回するほうが目的にかなっている．この場合は，安定配向への同期を無視して運動することになるので，そのような運動が原理的に可能なかどうか，回転の運動方程式に基づいて検討する．

## 2. 重力場中の剛体の回転運動のラグランジアンと運動方程式

重力の中心力場中を運動する物体を考える．原点に非常に大きな質量 $M$ の重力中心があるとき，質量 $m$  ( $\ll M$ ) の物体が位置 $\mathbf{r}_m$ で受ける重力ポテンシャルは

$$u(\mathbf{r}_m) = -GM \frac{m}{|\mathbf{r}_m|} \quad (2.1)$$

である． $G$ は万有引力定数である．この重力ポテンシャルに束縛された質点は楕円軌道を描く．正円の軌道の場合，その半径 $r_G$ と角速度 $\omega_0$ の間には次の関係がある．

$$\omega_0^2 = \frac{GM}{r_G^3} \quad (2.2)$$

この軌道を運動する物体が剛体であるとし，その質量中心を $\mathbf{r}_G$ とする．この剛体自身の質量中心まわりの回転を記述するために，オイラー角  $(\phi, \theta, \psi)$  を使う [5]．原点を剛体の質量中心に平行移動した座標系を  $(x, y, z) = \mathbf{r}$  とし，剛体に固定された（やはり質量中心を原点とする）座標系を  $(X, Y, Z) = \mathbf{R}$  とする．つまり， $(x, y, z)$ は軌道上の位置とともに回転しない座標系である．最も一般的なオイラー角の定義に従い，座標軸  $(x, y, z)$ を，まず $z$ 軸まわりに $\phi$ 回転して，次に新たな $x$ 軸まわりに $\theta$ 回転し，最後に新たな $z$ 軸まわりに $\psi$ 回転した状態が $(X, Y, Z)$ 座標軸であるとする．したがって，この直交座

標回転変換は次のように3つの行列の積によって表される.

$$S = S_\psi S_\theta S_\phi$$

$$S_\phi = \begin{pmatrix} \cos \phi & \sin \phi & 0 \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, S_\theta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}, S_\psi = \begin{pmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.3)$$

剛体の(慣性系に対する)回転運動はこのオイラー角の時間依存性  $(\phi(t), \theta(t), \psi(t))$  によって記述されることになる. その場合の角運動量ベクトル  $\boldsymbol{\omega}$  は剛体座標系で次のように表される.

$$\begin{cases} \omega_x = \dot{\theta} \cos \psi + \dot{\phi} \sin \psi \sin \theta \\ \omega_y = -\dot{\theta} \sin \psi + \dot{\phi} \cos \psi \sin \theta \\ \omega_z = \dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta \end{cases} \quad (2.4)$$

以下, 剛体の固定軸を慣性モーメントの主軸に取る. このとき, 回転運動エネルギーは

$$T = \frac{1}{2} I_1 \omega_x^2 + \frac{1}{2} I_2 \omega_y^2 + \frac{1}{2} I_3 \omega_z^2 \quad (2.5)$$

である.  $I_1, I_2, I_3$  はそれぞれ固定主軸  $X, Y, Z$  のまわりの慣性モーメントであり,  $\rho(\mathbf{R})$  を剛体の密度として,

$$I_1 = \int (Y^2 + Z^2) \rho(\mathbf{R}) d^3 \mathbf{R} \quad (2.6)$$

などである.

回転のポテンシャルエネルギー  $U$  を求めるため, 質量中心から  $\mathbf{r}$  だけ離れた位置  $\mathbf{r}_m = \mathbf{r}_G + \mathbf{r}$  における重力ポテンシャル  $u(\mathbf{r}_m)$  を  $|\mathbf{r}| \ll |\mathbf{r}_G|$  として展開する.

$$\frac{1}{|\mathbf{r}_G + \mathbf{r}|} = \frac{1}{|\mathbf{r}_G|} - \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}_G}{|\mathbf{r}_G|^3} + \frac{\mathbf{r}^2 \mathbf{r}_G^2 - 3(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}_G)^2}{2|\mathbf{r}_G|^5} + \dots \quad (2.7)$$

であるが, この第1項は定数項で回転に関係しない. 第2項は1次の項で,  $\mathbf{r}$  が質量中心を原点とする剛体内座標であることから, 剛体全体で積分すれば0になる. 第3項がポテンシャルの2次曲率によるもので, 力の勾配に相当する項である. ゆえに

$$U = \int [u(\mathbf{r}_G + \mathbf{r}) - u(\mathbf{r}_G)] \rho(\mathbf{r}) d^3 \mathbf{r}$$

$$= \frac{GM}{2|\mathbf{r}_G|^5} \int [\mathbf{r}^2 \mathbf{r}_G^2 - 3(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}_G)^2] \rho(\mathbf{r}) d^3 \mathbf{r} \quad (2.8)$$

となるが, これを次のように書き換えると, 慣性テンソルと関係づけられる.

$$\begin{aligned}
 U &= \frac{GM}{2r_G^5} \int \left[ -2r^2 r_G^2 + 3 \sum_{i=1}^3 (r^2 - x_i^2) x_{Gi}^2 - 3 \sum_{i \neq j} x_i x_j x_{Gi} x_{Gj} \right] \rho(\mathbf{r}) d^3\mathbf{r} \\
 &= \frac{GM}{2r_G^5} \left( -r_G^2 \sum_{i=1}^3 I_{ii} + 3 \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 x_{Gi} I_{ij} x_{Gj} \right) \quad (2.9)
 \end{aligned}$$

ここで  $\mathbf{r} = (x, y, z) = (x_1, x_2, x_3)$  などと表記しており,

$$I_{ij} \equiv \begin{cases} \int (r^2 - x_i^2) \rho(\mathbf{r}) d^3\mathbf{r} & (i = j) \\ - \int x_i x_j \rho(\mathbf{r}) d^3\mathbf{r} & (i \neq j) \end{cases} \quad (2.10)$$

が慣性テンソルである．慣性テンソルは，主軸における慣性モーメントの対角行列に式(2.3)の座標回転 $S$ を作用させて，

$$(I_{ij}) = S^{-1} \begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix} S \quad (2.11)$$

によって計算することができる．実際にはこの行列の積から式(2.9)を求める計算は Mathematica などの数式処理ソフトを使って行うことができる[6]．一般の結果は非常に長い式になるが，次の節で扱う特別な場合については非常に簡単な式になる．

### 3. 円軌道上の長尺物体の場合

剛体の形として一軸性の物体，すなわち，3つの主軸の慣性モーメントのうち，2つが等しい場合を考える．具体的には $I_1 = I_2$ とすると，式(2.5)の回転運動エネルギーは

$$T = \frac{1}{2} I_1 (\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta) + \frac{1}{2} I_3 (\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta)^2 \quad (3.1)$$

となる．

質量中心が $xy$ 面内の円軌道を描いているとして，

$$\mathbf{r}_G = (r_G \cos(\omega_0 t), r_G \sin(\omega_0 t), 0) \quad (3.2)$$

と置くと，式(2.8)のポテンシャルエネルギーは (定数項を省いて)

$$U = -\frac{3}{2} \omega_0^2 (I_1 - I_3) \sin^2 \theta \sin^2(\phi - \omega_0 t) \quad (3.3)$$

という簡単な表式になる． $\omega_0$ は式(2.2)で与えられる．

このポテンシャルは， $I_1 > I_3$ の場合， $0 \geq U \geq -\frac{3}{2} \omega_0^2 (I_1 - I_3)$  であり，図3に表示されているように， $\theta = (l + \frac{1}{2})\pi$  かつ  $\phi - \omega_0 t = (n + \frac{1}{2})\pi$  ( $l, n$ は整数) が $U$ を最小にする安定点 (時間とともに移動する) である．これが図2(a)の状態に相当する．この安定点は，そのまわりの $\theta, \phi$ の両方向にポテンシャル曲率が正であり，絶対安定点である．

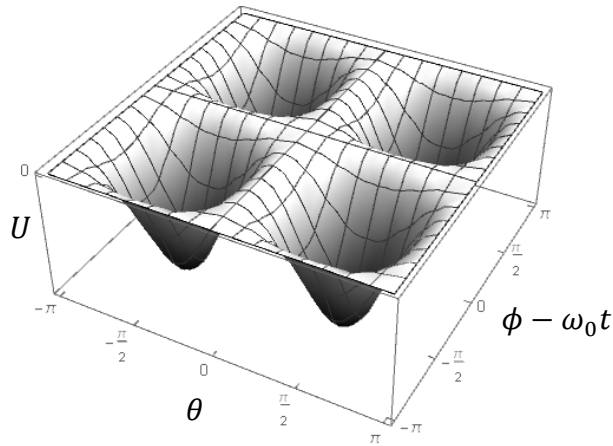


図 3.  $I_1 > I_3$  の場合の  $U(\theta, \phi)$  (式 3.3)

なお,  $I_1 < I_3$  の場合 ( $I_3$  の最大値は  $2I_1$ ) は,  $0 \leq U \leq \frac{3}{2} \omega_0^2 (I_3 - I_1)$  で, ちょうど図 3 で上下が反対になったポテンシャルになる. よって,  $U$  が最小値  $0$  をとるのは,  $\theta = l\pi$  または  $\phi - \omega_0 t = n\pi$  ( $l, n$  は整数) の直線上である. つまり, 最小エネルギーのどの状態においても自由に回転できる方向が存在する. また,  $I_1 = I_3$ , つまり慣性モーメントが等方的な場合には,  $U \equiv 0$  になり, 勾配力によるトルクはまったく働かない.

以上で求めた  $T$  と  $U$  から, ラグランジアン  $L \equiv T - U$  は

$$L = \frac{1}{2} I_1 (\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta) + \frac{1}{2} I_3 (\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta)^2 + \frac{3}{2} \omega_0^2 (I_1 - I_3) \sin^2 \theta \sin^2(\phi - \omega_0 t) \quad (3.4)$$

となる. ラグランジュの運動方程式のうち  $\psi$  に関するもの

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} - \frac{\partial L}{\partial \psi} = 0 \quad (3.5)$$

は

$$\frac{d}{dt} (\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta) = 0 \quad (3.6)$$

となるが, これは式(2.4)から

$$\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta = \omega_z = \text{定数} \quad (3.7)$$

を意味する. これは,  $Z$  軸まわりには等方的 ( $I_1 = I_2$ ) と仮定したので, 重力勾配が働かず, 角運動量が保存するということである. 式(3.7)を式(3.5)に代入すると, ラグランジアンの座標変数は  $\theta$  と  $\phi$  のみになり, 定数項を除いて

$$L = \frac{1}{2} I_1 (\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta) + \frac{3}{2} \omega_0^2 (I_1 - I_3) \sin^2 \theta \sin^2(\phi - \omega_0 t) \quad (3.8)$$

となる.

$I_3 < I_1$  の場合, つまり, 長尺の剛体の場合,

$$\Omega = \sqrt{3\left(1 - \frac{I_3}{I_1}\right)} \omega_0 \quad (3.9)$$

と置くと、 $\theta$ と $\phi$ に関するラグランジュの運動方程式

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0 \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} - \frac{\partial L}{\partial \phi} = 0 \end{cases} \quad (3.10)$$

は次のようになる.

$$\begin{cases} \ddot{\theta} - \frac{1}{2} [\dot{\phi}^2 + \Omega^2 \sin^2(\phi - \omega_0 t)] \sin 2\theta = 0 \\ \ddot{\phi} \sin^2 \theta + 2\dot{\phi} \dot{\theta} \sin \theta \cos \theta - \frac{1}{2} \Omega^2 \sin^2 \theta \sin[2(\phi - \omega_0 t)] = 0 \end{cases} \quad (3.11)$$

この方程式の無次元パラメータは  $\Omega/\omega_0 = \sqrt{3(1 - \frac{I_3}{I_1})}$  だけで,  $I_3 \ll I_1$  のときにはほぼ定数  $\sqrt{3}$  になる.

図 2 のように長尺方向が公転面 ( $xy$ 面) 内にある場合 ( $Z$ 軸を  $90^\circ$  傾けるので  $\theta = \frac{\pi}{2}$ ) に限定すれば, 運動方程式は

$$\ddot{\phi} - \frac{1}{2} \Omega^2 \sin[2(\phi - \omega_0 t)] = 0 \quad (3.12)$$

となる.  $\phi$  が  $\omega_0 t$  にほぼ同期している場合 (図 2(a) に相当) を考え,  $\phi - \omega_0 t = \frac{\pi}{2} + u$  とおくと

$$\ddot{u} + \frac{1}{2} \Omega^2 \sin(2u) = 0 \quad (3.13)$$

という振り子の方程式になる. 地上で支点のある剛体振り子の方程式との違いは,  $u$  の周期が  $2\pi$  ではなく  $\pi$  であることである.  $u$  の小さいところでは角振動数  $\Omega$  の単振動となる. 式(3.9)により,  $I_3 = 0$  のとき  $\Omega = \sqrt{3}\omega_0$  で, 円軌道の周期と無理数比の関係にある.

#### 4. 準方位固定配向

図 2(b) のような方位固定に近い配向を実現するには,  $\phi \approx$  一定でなければならない. 安定配向である  $\phi = \omega_0 t$  という同期回転に対抗するためには,  $\phi$  に逆回転のモーメントを与える必要があるだろう.

$I_3 = 0$  の場合について, さまざまな初期条件を与えて方程式(3.12)を数値計算した結果,  $\phi(0) = 0$  かつ  $\dot{\phi}(0) \doteq 0.55642 \omega_0$  (あるいは,  $\phi(0) = \frac{\pi}{2}$  かつ  $\dot{\phi}(0) \doteq -0.78795 \omega_0$ )

という初期条件によって方位固定に近い配向が可能であることが分った. このときの  $\phi(t)$  の計算結果を図 4 に示す.

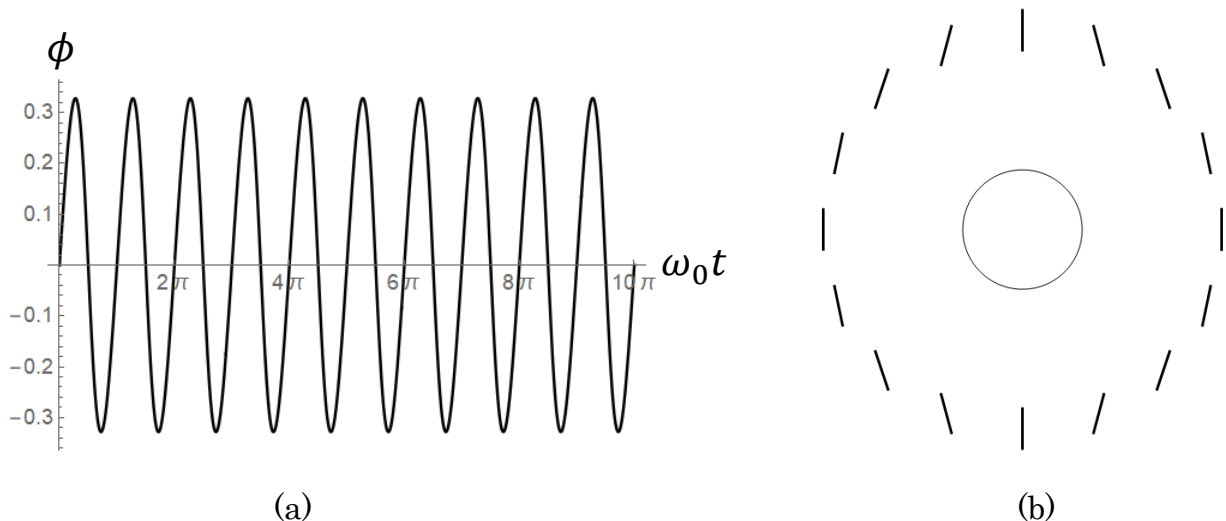


図 4. (a)  $\phi = 0$  近傍で周期振動する  $\phi(t)$  の解 ; (b) 対応する軌道上での配向

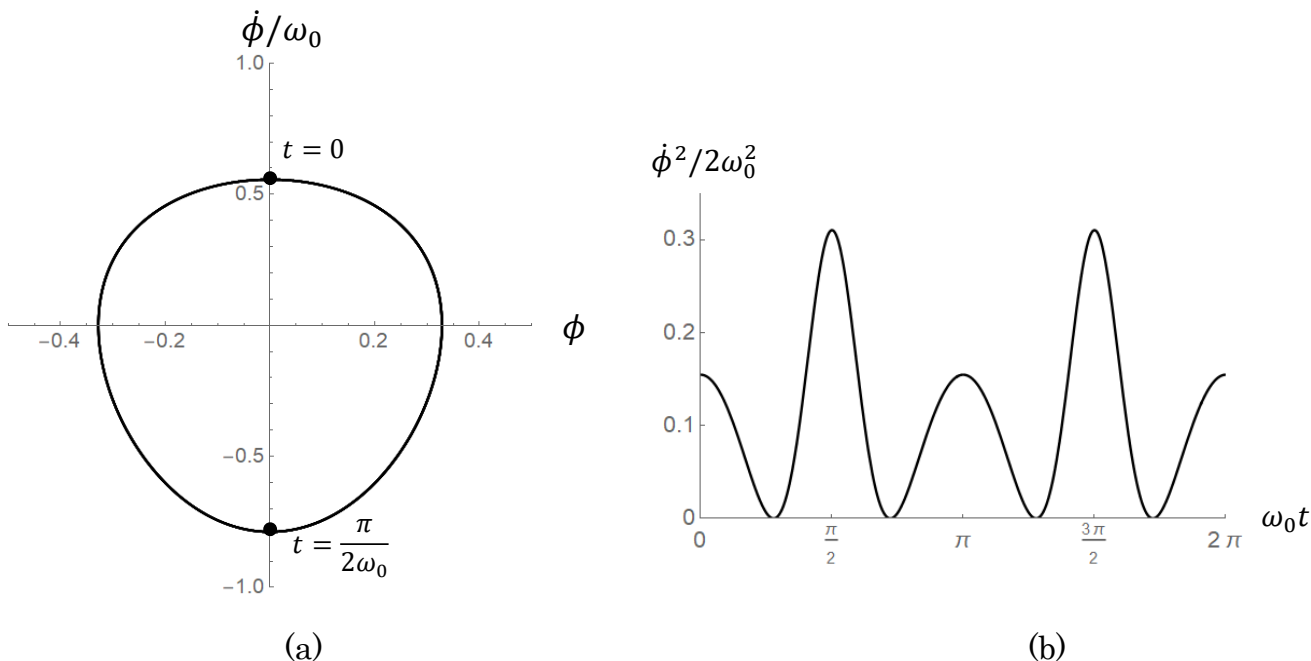


図 5. 振動解 (図 3) の(a)位相空間軌跡と(b)運動エネルギー

この運動は、図 3 において  $\theta = \pi/2$  の直線上を、 $\phi - \omega_0 t$  が負の方向に動いていくことに対応しており、ポテンシャルの谷と山を越えながら一方向に進むため、動きに振動が加わるのである。図 4(a)のように、 $\phi$  の振動は正弦波に近く、その振幅  $\varepsilon$  は約  $0.328$  ラジアン (約  $18.8^\circ$ ) である。正確には正弦波からずれており、 $\phi(t)$  と  $\dot{\phi}(t)$  の位相空間での軌跡を描くと図 5(a) のようになる。 $\dot{\phi}(t)$  の最大値が  $0.55642 \omega_0$  で、最小値が  $-0.78795 \omega_0$  である。図 5(b) は運動エネルギー  $T = \frac{1}{2} I_1 \dot{\phi}^2$  を時間の関数として示したものである。



太陽光発電の実効面積という観点からは、 $\cos \phi$ の平均値が重要である。 $\phi$ の小さな振動を正弦波として1周期で平均すると、

$$\langle \cos \phi \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos(\varepsilon \sin t) dt \approx \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(1 - \frac{\varepsilon^2}{2} \sin^2 t\right) dt = 1 - \frac{\varepsilon^2}{4}$$

となる。 $\varepsilon = 0.328$ を代入すると $\langle \cos \phi \rangle \approx 0.973$ となり、実効面積の減少は約2.7%であり、これは十分に小さいと言えよう。

なお、ここで示した解は、 $I_3 = 0$ のときのもので、公転半径 $r_G$ や慣性モーメント $I_1$ によらない。 $I_3 \neq 0$ の場合は式(3.9)により $\Omega$ が小さくなるので、振動の振幅 $\varepsilon$ は、より小さくなる。

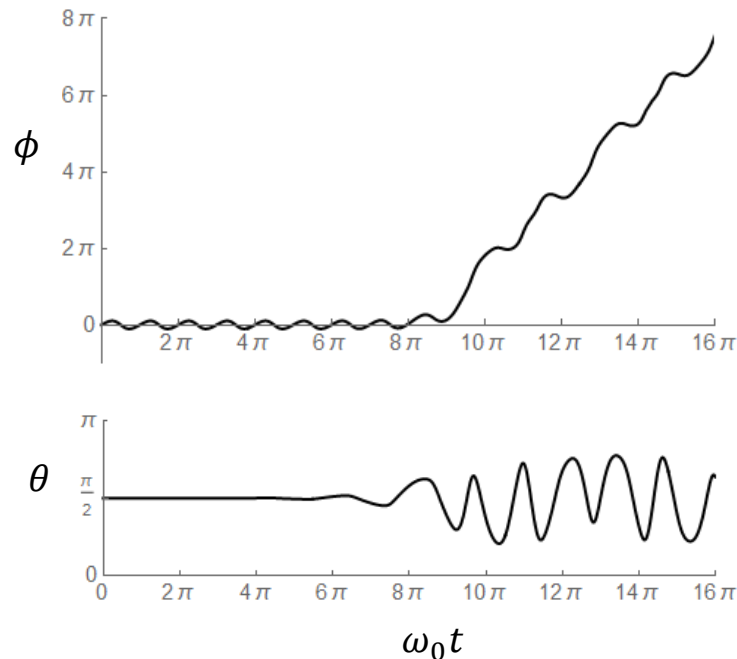


図 6.  $\theta$ の初期値にわずかなずれを与えた場合の数値解の例

さて、この準方位固定配向は振動を衛星の公転面内に限った場合( $\theta = \pi/2$ )に得られるが、 $\theta$ の揺らぎはどう影響するであろうか。式(3.11)の微分方程式に戻り、初期条件として、 $\theta(0)$ ないし $\dot{\theta}(0)$ にわずかなずれを与えた場合について数値計算してみた。一例として、 $\phi(0)$ と $\dot{\phi}(0)$ は図4の場合と同じで、 $\theta(0) = (1 + 0.0001)\pi/2$ 、 $\dot{\theta}(0) = 0$ とした場合の結果を図6に示す。最初のうちは図4(a)と同様の $\phi(t)$ の振動があるが、 $\theta(t)$ の振動が徐々に大きくなり、やがてある時点から、 $\phi$ の方位固定が失われ、同期安定配向に近い複雑な振動に移行してしまう。これは、最初に与えた $\phi$ 振動の運動エネルギー(もともとそれほど大きくない)の一部が $\theta$ 振動に移ることで、 $\phi$ の方向のポテンシャル障壁を越えられなくなるものと解釈できる。したがって、方位固定に近い配向を維持するためには、長尺軸の軌道面外へのずれが起きないように常に姿勢を人為的に制御することが必要であるということになる。

なお、ここでは長尺の構造について解析したが、太陽光発電面本体をテザー構造にせ

ず、そのまま平面的な構造の衛星として考える場合は、慣性モーメントが $I_1 < I_3$ の場合について解析すれば良い。このような扁平物体の場合、物体面が軌道面内であれば常に安定であるが、太陽の方向を向くためには、地球のまわりを南北方向に周回する軌道でなければならず、地上へのマイクロ波送電に適した赤道上の静止衛星ではなくなる。赤道上の軌道の場合は物体面を軌道面に直立させて図 2(b)のように回る必要があり、その場合、今回得られた準方位固定配向と同様の運動は可能であるものの、ポテンシャル(図 3 の上下を逆にしたもの)の不安定頂点を通過するため、長尺物体の場合以上にさらに不安定で、準方位固定配向を維持することはやはり難しい。

## 5. おわりに

地球のまわりの軌道を周回する長尺な衛星が、重力勾配によるトルクにもかかわらず、方位をほぼ固定した配向をとることは可能であるが、長期間にわたって自律的にこの配向を維持することは難しいことが分った。つまり、宇宙太陽光発電について言えば、発電面を常に太陽に向ける静止姿勢を取ることは地球の重力勾配下では難しく、人為的な姿勢制御が不可欠ということである。この目的のためには、ここでは議論しなかったが地軸の傾きも考慮する必要がある。春分と秋分以外では太陽光発電の実効面積を最大化するためには、衛星軌道面に垂直ではなく、斜めに傾ける必要があり、季節的な姿勢制御機構を必要とする。

宇宙太陽光発電所は、大面積の太陽光発電面と大面積のマイクロ波送電面の両方を必要とし、両者の方位の要請(地球指向か太陽指向か)が異なる。そのため、両者を別構造とし、相対的に回転させつつ、精密に姿勢を制御することが必要で、さらに発電面から送電面に大電流を送るという難しい機構を必要とする。姿勢制御にはリアクションホイールなどのモーター機構を使うが、その駆動にエネルギーが必要であることは言うまでもない。

こうした困難を避けるため、太陽に指向することをあきらめ、太陽電池と送電アンテナを一体化する地球指向方式が考えられている[1,2]。しかし、これでは宇宙で太陽光発電することの意味が大きく損なわれ、地球への送電ロスを考慮すると、実際の発電効率は地上での太陽光発電とあまり変わらないことになってしまう。宇宙太陽光発電所の建設のためには大量の資材をロケットで打ち上げなければならないことも考慮すると、宇宙太陽光発電の実現可能性は現状では見通せない。

## 参考文献

- [1] 吉岡完治, 松岡秀雄, 早見均, 『宇宙太陽光発電衛星のある地球と将来』(慶應義塾大学出版会, 2009).
- [2] S. Sasaki et al., A new concept of solar power satellite: Tethered-SPS, Acta Astronautica Vol. 60 (2006) 153-165.
- [3] R.E. Fischell, Gravity gradient stabilization of earth satellites, APL Technical Digest, Vol.3, No.4 (1964) 12-21.

- [4] R.V. Ramnach, *Computation and Asymptotics* (Springer Briefs in Computational Mechanics), Springer (2012), Appendix A.
- [5] エリ・デ・ランダウ, イェ・エム・リフシッツ, 『ランダウ=リフシッツ理論物理学 教程 力学』(増訂第3版)(東京図書, 1974), 第6章.
- [6] E. W. Weisstein, "Euler Angles" From MathWorld - A Wolfram Web Resource, <http://mathworld.wolfram.com/EulerAngles.html>

(原稿提出: 2018 年 12 月 25 日; 修正稿提出: 2019 年 2 月 10 日)