

## 長時間相関を持つカオス結合系における情報の流れの計測

|     |   |
|-----|---|
| 著者  | 木下 修一, 片山 明   |
| 雑誌名 | 武蔵野大学数理工学センター紀要   |
| 号   | 5   |
| ページ | 34-43   |
| 発行年 | 2020-03-01  |
| URL | <a href="http://id.nii.ac.jp/1419/00001267/">http://id.nii.ac.jp/1419/00001267/</a> |

# 長時間相関を持つカオス結合系における情報の流れの計測

## Measurement of information flow on Coupled Map Lattice with long-term correlation

木下修一<sup>1</sup>

Shu-ichi Kinoshita

片山明<sup>2</sup>

Akira Katayama

### 1 はじめに

決定論的なカオス素子により構成された結合写像格子 (CML)[1] や大域結合写像系 (GCM) [2] は系を構成する素子から想像のできない多様な振る舞いを示す事が知られている [3, 4]. このような特徴から CML や GCM は基礎方程式の存在の有無に関わらず, カオス的な特徴を持つ多くの大自由度系 (例えば, 乱流 [5], 生態系 [6], 脳 [7], 化学反応系 [8], 社会・経済系 [9] など) の抽象的なモデルとしてしばしば取り扱われる. 特に, 社会・経済系においてはインターネットや計測・センサー技術の進展によるデータの蓄積等に伴い精度の良い社会行動の分析が可能となりつつある [10]. その結果, 人間の幾つかの行動は単なるランダムネスではなく, 過去の行動履歴を長期に渡って引きずる特徴 (長時間相関) を持っていることが明らかにされている. このような長時間相関は時系列のパワースペクトルや相関関数のべき的な振る舞いにより特徴づけられる [11].

上記の背景を踏まえ, 本研究では長時間相関を持つカオス素子の特性が他のカオス素子に与える影響を定量的に調べることを目的とし, 長時間相関を持つカオス素子と長時間相関を持たないカオス素子の2つの素子により構成される CML 上の情報の流れを数値計算により調べた.

### 2 長時間相関を持つ結合写像格子 (CML)

本研究では, 長時間相関を持つカオス素子の結合強度と情報の流れの関係を明白にするため, 2つのカオス素子が対称に拡散結合した CML

$$\begin{aligned}x_1^{t+1} &= f_1(x_1^t) + k\{f_2(x_2^t) - f_1(x_1^t)\} \\x_2^{t+1} &= f_2(x_2^t) + k\{f_1(x_1^t) - f_2(x_2^t)\}\end{aligned}\tag{1}$$

<sup>1</sup> 武蔵野大学数理工学センター員 / 武蔵野大学工学部数理工学科准教授

<sup>2</sup> 武蔵野大学大学院工学研究科数理工学専攻 博士前期課程1年

を用いる.  $x_i^t \in [-1, 1]$  は時刻  $t$  における素子  $i = 1, 2$  の状態であり,  $k$  は素子間の結合強度である. また,  $f_i(x)$  として変形ベルヌーイ写像 [12]

$$f_i(x) = \begin{cases} x + (1+x)^B & (-1 \leq x < 0) \\ x - (1-x)^B & (0 \leq x \leq 1) \end{cases} \quad (2)$$

を採用する (Y.Aizawa が提案したモデル [12] は  $f_i(x) \in [0, 1]$  で定義されているが, 本研究では変数変換を施し,  $f_i(x) \in [-1, 1]$  とした).  $B$  はコントロールパラメータであり,  $B = 1.0$  のときはベルヌーイ写像に対応する. 図 1 は式 (2) のリターンマップであり, 点線 (青) は  $B = 1.0$  (つまり, ベルヌーイ写像) であり, 実線 (赤) は  $B = 2.0$  の変形ベルヌーイ写像である.  $B$  を大きくするほど写像が湾曲し  $y = x$  に近づくため,  $x^t$  と  $x^{t+1}$  の差が小さくなり,  $x^t$  時間変動が小さい領域 (laminar 相) が拡大する. この効果により, 時間相関を持つ  $x_i^t$  の時系列が生成される.

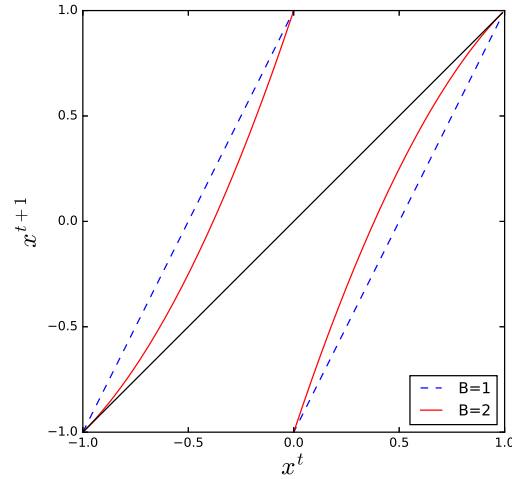


図 1 変形ベルヌーイ写像のリターンマップ. 点線 (青) はベルヌーイ写像 ( $B = 1.0$ ) を表し, 実線 (赤) は変形ベルヌーイ写像 ( $B = 2.0$ ) を表している.

$$s_i \equiv \begin{cases} -1 & (-1 \leq x_i < 0) \\ +1 & (0 \leq x_i \leq 1) \end{cases} \quad (i = 1, 2), \quad (3)$$

ここで, 補助変数  $s_i$  (本研究では”スピン”と呼ぶ) を導入する. 本研究では  $x_i$  の時系列そのものを取り扱わず, スピン  $s_i$  の時系列を取り扱う. このように 2 値にシンボル化することで次節で紹介する Transfer Entropy を用いることが可能となる. ここでは, 先行研究 [13] により既に知られている変形ベルヌーイ写像により生成される  $s_i$  の時系列の特徴を紹介する. ( $x_i$  の時系列の特徴は Appendix A を参照のこと.)

図 2 ((a) $B = 1.0$ , (b) $B = 2.0$ ) は  $s_i$  の典型的な時系列であり, (a) と (b) を比較すると (b) の時系列は  $+1$  (もしくは  $-1$ ) の持続時間が拡大していることが分かる. この領域は  $x_i$  の時

系列における laminar 相に対応する領域であり，パラメータ  $B$  によりその領域の大きさをコントロールできる．続いて，この持続時間を  $m$  としその分布  $P(m)$  を表したものが図 3 である．(a) はベルヌーイ写像 ( $B = 1.0$ ) により生成された  $s_i$  の持続時間分布である．よく知られているようにこの持続時間分布は，長時間相関を持たない確率過程の典型的特徴である指数関数的減衰を示す．一方，(b) 変形ベルヌーイ写像 ( $B = 2.0$ ) により生成された  $s_i$  の持続時間分布はべき的な減衰を示し，その時系列には長時間相関があることを示している．このように，変形ベルヌーイ写像のパラメータ  $B$  を調整することで，長時間相関のある  $s_i$  の時系列が生成される．

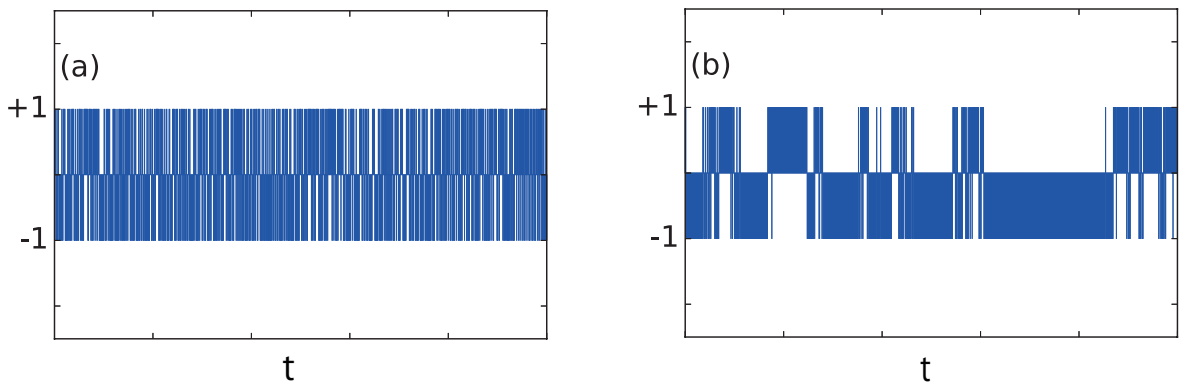


図 2 スピン  $s_i$  の典型的な時系列．(a) ベルヌーイ写像 ( $B = 1.0$ )，(b) 変形ベルヌーイ写像 ( $B = 2.0$ )

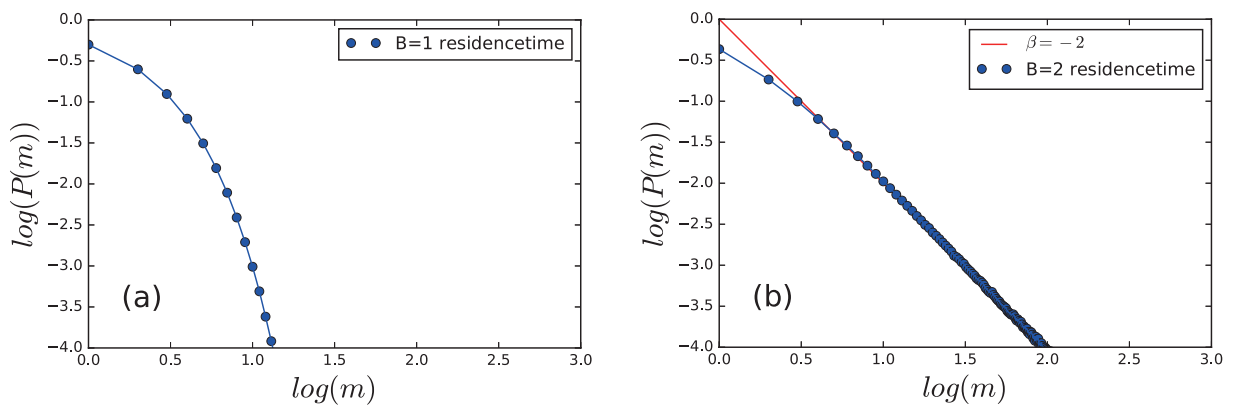


図 3 スピン  $s_i$  の持続時間分布 (両対数表記)．(a) ベルヌーイ写像 ( $B = 1.0$ )，(b) 変形ベルヌーイ写像 ( $B = 2.0$ )

### 3 Transfer Entropy

本節では、前節で導入したモデル上での情報の流れを定量的に計測する指標を導入する。一般に時系列データから因果関係を見つけることは困難であるが、古くから指標の提案が行われている [14]。本研究では、情報理論の観点から 2 つの時系列間の”因果性”(情報の流量) を定量化した Transfer Entropy (TE) を用いる [15]。TE は統計モデル (予測モデル) を仮定することなく時系列データのみからその量を計算できることや情報論的な解釈が容易であることから、神経系 [16]、情報熱力学 [17]、金融システム [18] など多くの分野で取り扱われている。Transfer Entropy は幾つかの条件下 (例えば、XOR 素子により構成された系) では情報の流れを適切に表現できないことが指摘されているが [19]、本研究で用いたモデルはこの例に当てはまらない。本節では TE のコンセプトを理解するため、先行研究 [15] に従いシャノンの情報エントロピーから順に説明し、最後に TE の定義を示す。

離散確率変数  $X$  の中で、 $X = x$  となる確率  $p(x)$  とすると、情報理論より情報量  $I(x)$  は  $I(x) \equiv -\log_2 p(x)$  となる。また、情報エントロピー  $H_X$  は  $I(x)$  の期待値として定義され、 $H_X \equiv \sum_x p(x)I(x) = -\sum_x p(x)\log_2 p(x)$  となる。この  $H_X$  は情報の不確かさの程度を表し、 $p(x)$  が一様分布であるとき最大値を取る量である。次に、 $X$  と異なる離散確率変数  $Y$  を考え、 $Y = y$  となる確率を  $p(y)$  とする。この時、 $x$  および  $y$  が同時に実現する同時確率  $p(x, y)$  についても情報エントロピー (結合エントロピー) を定義すると、 $H_{XY} \equiv -\sum_{x,y} p(x, y)\log_2 p(x, y)$  となる。この時、もし  $x$  と  $y$  が独立ならば  $p(x, y) = p(x)p(y)$  となり、結合エントロピーは  $H_{XY}^* = -\sum_{x,y} p(x, y)\log_2 p(x)p(y)$  となる。ここで、 $H_{XY}$  および  $H_{XY}^*$  を用いて、相互情報量は下記のように定義される

$$M_{XY} \equiv H_{XY}^* - H_{XY} = \sum_{x,y} p(x, y)\log_2 \frac{p(x, y)}{p(x)p(y)}. \quad (4)$$

$X$  と  $Y$  が独立である場合に  $M_{XY} = 0$  となり、 $Y$  (もしくは  $X$ ) を得たときに  $X$  (もしくは  $Y$ ) の不確かさ (情報エントロピー) が減少する量を示している。式 (4) より相互情報量  $M_{XY}$  はあくまで相互に依存する対称的な量であり  $M_{XY} = M_{YX}$  となることが分かる。つまり、 $X \rightarrow Y$  または  $Y \rightarrow X$  といった方向を持たない量であることに注意する必要がある。

続いて、時系列データについて考える。時刻  $t$  における離散確率変数  $X^t$  に対して、 $X^t = x_t$  となる確率を  $p(x^t)$  とし、 $t+1$  時刻において  $X^{t+1} = x^{t+1}$  が実現する確率が  $u$  時刻前までに依存する場合、条件付確率は  $p(x^{t+1}|\mathbf{x}^{t(u)})$  となる (ここで、 $\mathbf{x}^{t(u)} = (x^t, x^{t-1}, \dots, x^{t-u+1})$  とした)。この時、条件付確率の情報エントロピー (条件付きエントロピー) は

$$\begin{aligned}
 h_{X^{t+1}|X^{t(u)}} &\equiv - \sum_{\mathbf{x}^{t(u)}} p(\mathbf{x}^{t(u)}) \sum_{x^{t+1}} p(x^{t+1}|\mathbf{x}^{t(u)}) \log_2 p(x^{t+1}|\mathbf{x}^{t(u)}) \\
 &= - \sum_{x^{t+1}, \mathbf{x}^{t(u)}} p(x^{t+1}, \mathbf{x}^{t(u)}) \log_2 p(x^{t+1}|\mathbf{x}^{t(u)})
 \end{aligned} \tag{5}$$

と定義される.  $X^t$  と同様に時刻  $t$  における離散確率変数  $Y^t = y^t$  となる確率を  $p(y^t)$  と定義し, 条件付確率  $p(x^{t+1}|(\mathbf{x}^{t(u)}, \mathbf{y}^{t(v)}))$  について考える (ここで,  $\mathbf{y}^{t(v)} = (y^t, y^{t-1}, \dots, y^{t-v+1})$  とした). この時,  $p(x^{t+1}|(\mathbf{x}^{t(u)}, \mathbf{y}^{t(v)}))$  についての条件付きエントロピーは,  $h_{X^{t+1}|(X^{t(u)}, Y^{t(v)})} \equiv \sum_{x^{t+1}, \mathbf{x}^{t(u)}, \mathbf{y}^{t(v)}} p(x^{t+1}, \mathbf{x}^{t(u)}, \mathbf{y}^{t(v)}) \log_2 p(x^{t+1}|(\mathbf{x}^{t(u)}, \mathbf{y}^{t(v)}))$  となる. また,  $x^{t+1}$  と  $\mathbf{y}^{t(v)}$  が独立ならば  $p(x^{t+1}|(\mathbf{x}^{t(u)}, \mathbf{y}^{t(v)})) = p(x^{t+1}|\mathbf{x}^{t(u)})$  となり, この時の情報エントロピーは  $h_{X^{t+1}|(X^{t(u)}, Y^{t(v)})}^* \equiv \sum_{x^{t+1}, \mathbf{x}^{t(u)}, \mathbf{y}^{t(v)}} p(x^{t+1}, \mathbf{x}^{t(u)}, \mathbf{y}^{t(v)}) \log_2 p(x^{t+1}|\mathbf{x}^{t(u)})$  となる. ここで, TE は次のように定義される

$$\begin{aligned}
 T_{YX} &\equiv h_{X^{t+1}|(X^{t(u)}, Y^{t(v)})}^* - h_{X^{t+1}|(X^{t(u)}, Y^{t(v)})} \\
 &= \sum_{x^{t+1}, \mathbf{x}^{t(u)}, \mathbf{y}^{t(v)}} p(x^{t+1}, \mathbf{x}^{t(u)}, \mathbf{y}^{t(v)}) \log_2 \frac{p(x^{t+1}|(\mathbf{x}^{t(u)}, \mathbf{y}^{t(v)}))}{p(x^{t+1}|\mathbf{x}^{t(u)})}, \\
 T_{XY} &\equiv \sum_{y^{t+1}, \mathbf{x}^{t(u)}, \mathbf{y}^{t(v)}} p(y^{t+1}, \mathbf{x}^{t(u)}, \mathbf{y}^{t(v)}) \log_2 \frac{p(y^{t+1}|(\mathbf{x}^{t(u)}, \mathbf{y}^{t(v)}))}{p(y^{t+1}|\mathbf{y}^{t(v)})}.
 \end{aligned} \tag{6}$$

式 (4), (6) を比較すると分かるように, 相互情報量  $M_{XY}$  と異なり一般的に TE は  $T_{YX} \neq T_{XY}$  となり非対称である. この非対称な TE の性質が情報理論の観点から情報の流れの向きを論ずる枠組みを提供する事につながっている. 本研究では  $u = 1, v = 1$  の最もシンプルな TE を用いて情報の流れを計測した.

## 4 Transfer entropy を用いた情報の流れの計測

本節では TE を用いた CML 上における情報の流れの計測結果を示す. 本研究では (1) ベルヌーイ写像 ( $B = 1.0$ ) の結合系 (B-CML), (2) 変形ベルヌーイ写像 ( $B = 1.5$ ) の結合系 (M-CML), (3) ベルヌーイ写像と変形ベルヌーイ写像の結合系 (BM-CML) の 3 種類の CML について TE を計測し比較を行った. 本研究では結合強度  $k$  は素子に依存せず常に対称性を保っている. また, 以降の数値計算結果はすべてステップ数  $T = 10^7$  回, サンプル数 10 の平均値である.

図 4 は B-CML および M-CML の TE の  $k$  依存性である.  $T_{ij}$  は素子  $i$  から素子  $j$  への TE であり, 上付き添え字 B, M, MB はそれぞれ B-CML, M-CML, BM-CML の TE であることを意味する. 実線 (青色) および破線 (オレンジ) は  $T_{21}^B$  および  $T_{12}^B$  を表し, dashed dotted 線 (緑色) および点線 (赤色) は  $T_{21}^M$  および  $T_{12}^M$  を表す. 系が対称であるため, B-CML, M-CML のいずれのモデルにおいても  $T_{21} \simeq T_{12}$  が成立し, TE は  $k$  に対して指数関数的に増大するこ

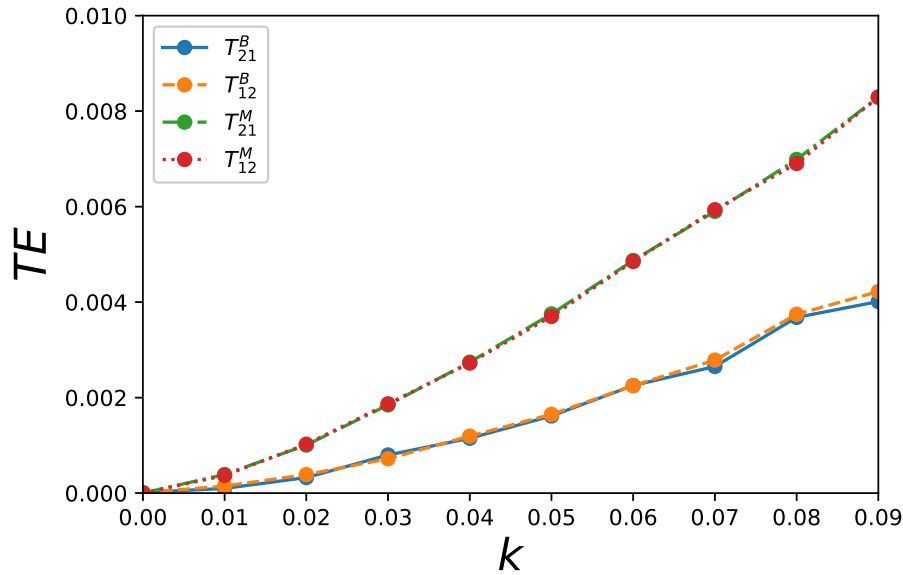


図4 B-CML および M-CML における TE の結合強度  $k$  依存性

と分かる. また,  $k$  に対して  $T^M > T^B$  の関係が常に成り立っていることが分かる. このことは, B-CML と比較し M-CML は素子同士影響を受けやすい系であることを意味している.

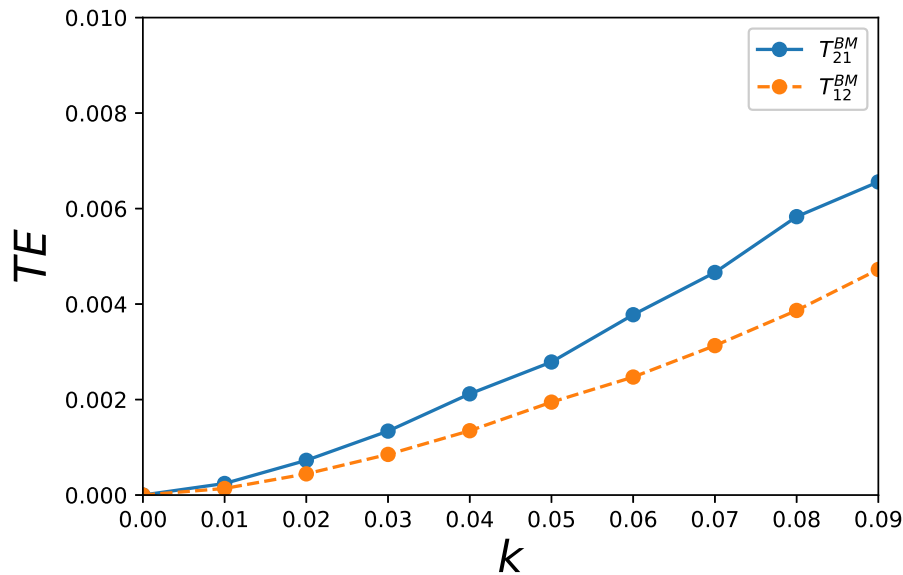
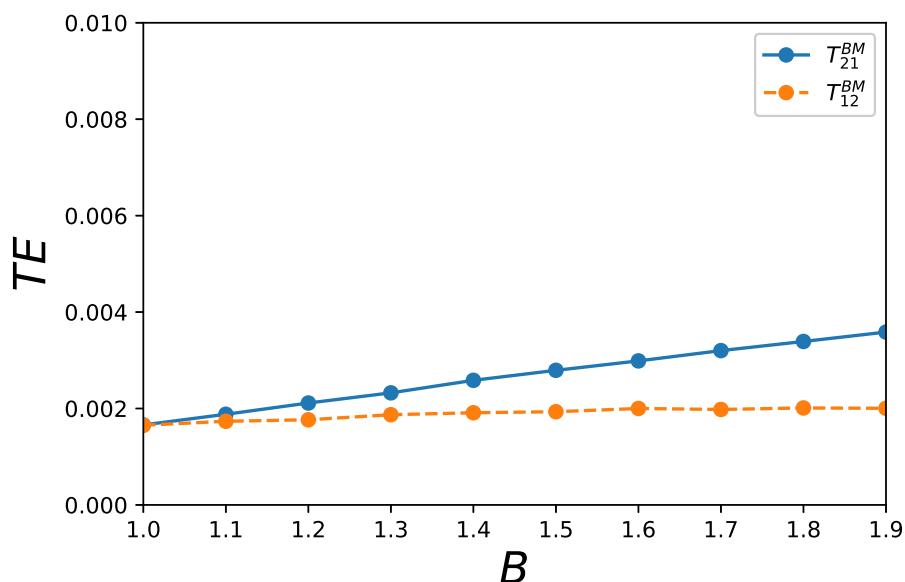


図5 BM-CML における TE の結合強度  $k$  依存性

次に, BM-CML における TE の  $k$  依存性を調べた. 素子 1 はベルヌーイ写像 ( $B = 1.0$ ) であり, 素子 2 は変形ベルヌーイ写像 ( $B = 1.5$ ) である. 図 5 より, B-CML, M-CML の場合と同様に BM-CML の場合においても, TE は  $k$  に対し指数関数的に増大する. ただし,  $T_{21}^{BM} > T_{12}^{BM}$  となり変形ベルヌーイ写像である素子 2 からベルヌーイ写像である素子 1 への情報の流れが, その逆からの情報の流れよりも大きくなっている. このことをより明確化するために TE の  $B$  依存性を調べた. 図 6 は BM-CML( $k = 0.05$ ) における TE の  $B$  依存性であ

図6 BM-CMLにおけるTEの結合強度 $B$ 依存性

る。 $T_{12}^{BM}$ は $B$ に対する依存性がないのに対し、 $T_{21}^{BM}$ は $B$ に対し線形に大きくなっており、結合強度が一定であっても変形ベルヌーイ写像素子の長時間相関が大きくなるにつれ変形ベルヌーイ写像素子からベルヌーイ写像素子への情報の流れが大きくなることが分かる。このことは、長時間相関をもつ素子の動作に長時間相関を持たない素子が引っ張られることを意味している。

## 5 まとめと議論

本研究では性質の異なる2素子により構成されるカオス結合系において、長時間相関を持つカオス素子の特性が他のカオス素子に与える影響を定量的に調べることを目的とし、(1)ベルヌーイ写像の結合系(B-CML)、(2)変形ベルヌーイ写像の結合系(M-CML)、(3)ベルヌーイ写像と変形ベルヌーイ写像の結合系(BM-CML)の3種類のCMLにおけるTEを計測し比較を行った。その結果、B-CMLおよびM-CMLにおいては系の対称性を反映し $T_{21} \simeq T_{12}$ を保ちながら $k$ に対してTE指数関数的に増大することが分かった。次に、BM-CMLにおいては変形ベルヌーイ写像の素子2からのTEがベルヌーイ写像の素子1からのTEより常に大きく $T_{21} > T_{12}$ の関係があることが分かった。このことは、変形ベルヌーイ写像からベルヌーイ写像へ情報が流れていることを意味する。さらに長時間相関の大きさが素子間の情報の流れに大きな影響を与えると考え、変形ベルヌーイ写像のパラメータ $B$ に対するTEの依存性を調べた。その結果、変形ベルヌーイ写像からベルヌーイ写像へのTEは $B$ に対して $T_{21} \propto B$ となることが分かった。これらの結果は長時間相関を持つカオス素子は長時間相関を持たないカオス素子へ強い影響を与えることを示唆している。

本研究の結果を踏まえ、大自由度系(ネットワーク含む)での長時間相関を持つカオス素子



の影響を調べることが今後の課題としてあげられる。

## Appendix A 変形ベルヌーイ写像により生成される $x^t$ の時系列の特徴

先行研究 [12, 13] で示されている変形ベルヌーイ写像により生成される時系列  $x^t$  の幾つかの特徴を以下に示す。

まず,  $x^t$  の軌道不安定性を定量化するリャプノフ指数  $\lambda \equiv \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{t=0}^{n-1} \ln |f'(x^t)|$  の  $B$  依存性は図 7 のように  $1.0 < B < 2.5$  の範囲で  $\lambda > 0$ ,  $B \geq 2.5$  の範囲で  $\lambda \simeq 0$  を示す. このことから  $B < 2.5$  においては軌道不安定性をリャプノフ指数から評価できるが,  $B \geq 2.5$  ではリャプノフ指数のみから軌道不安定性を評価できないことが分かる. 次に, ベルヌーイ写像および変形ベルヌーイ写像の典型的な時系列を示す. 図 8 は (a) ベルヌーイ写像, (b) 変形ベルヌーイ写像の典型的な時系列である. 変形ベルヌーイ写像はベルヌーイ写像と比較し laminar 領域が長くなっている. この原因としてはパラメータ  $B$  が大きくなると, 写像が湾曲し  $y = x$  に近づくことが上げられる. 続いて, この時系列の特徴を把握するため 2 つの時系列についてパワースペクトル  $S(f) \equiv |\sum_{t=0}^{T-1} x^t \exp(2\pi i t f)|^2$  を計算した. 図 9(a) はベルヌーイ写像, (b) は変形ベルヌーイ写像のパワースペクトル  $S(f)$  の両対数表示である. (a) と比較し (b) は  $1/f$  タイプの揺らぎを示しており, 長時間相関を持つ信号の典型的なパワースペクトルを示している. また, カオス力学系の軌道の長時間時系列の統計的性質としてよく用いられる不変測度  $\rho(x) \equiv \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \sum_{t=0}^{T-1} \delta(x - x^t)$  の分布を示したものが図 10 である. (a) ベルヌーイ写像では不変測度は  $\rho(x) = 0.5$  の一様分布となるが, (b) 変形ベルヌーイ写像では凹型に湾曲した分布となる. この不変測度の分布は近似的に  $\rho(x) \sim 2^{B-1} \{(1+x)^{1-B} + (1-x)^{1-B}\}$  となることが知られている [20].

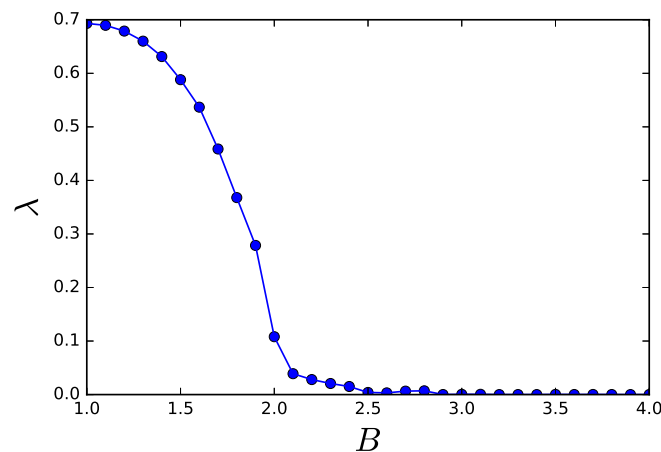


図 7 リャプノフ指数  $\lambda$  の  $B$  依存性

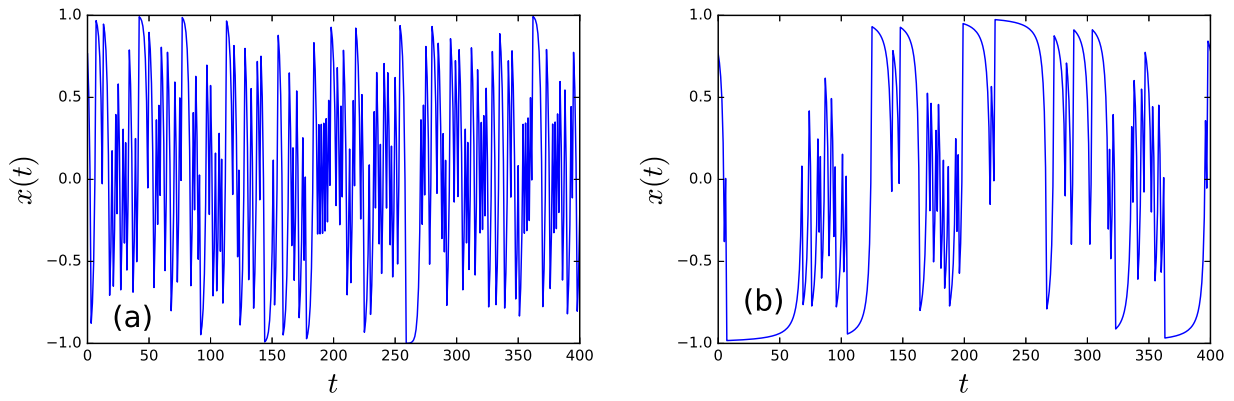


図8 典型的な  $x^t$  の時系列. (a) ベルヌーイ写像  $B = 1.0$ , (b) 変形ベルヌーイ写像  $B = 2.0$

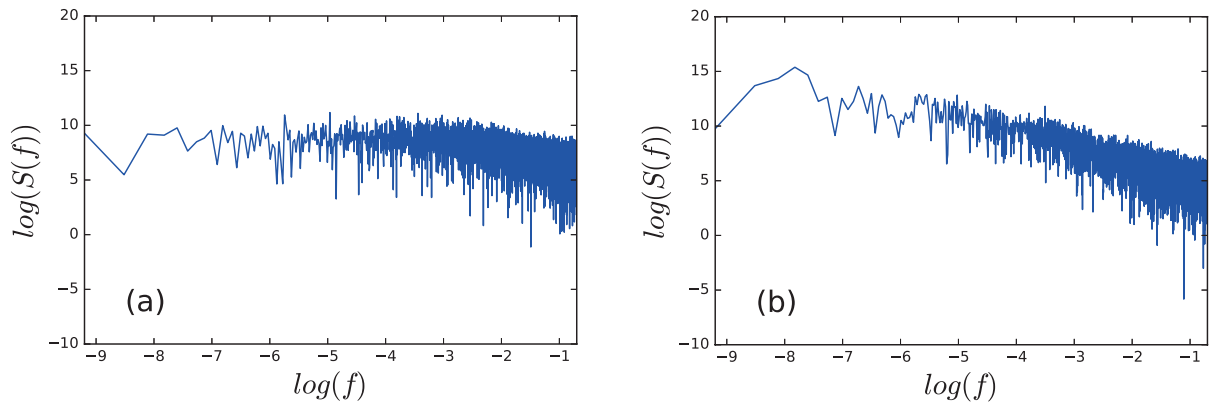


図9 パワースペクトル  $S(f)$ . (a) ベルヌーイ写像  $B = 1.0$ , (b) 変形ベルヌーイ写像  $B = 2.0$

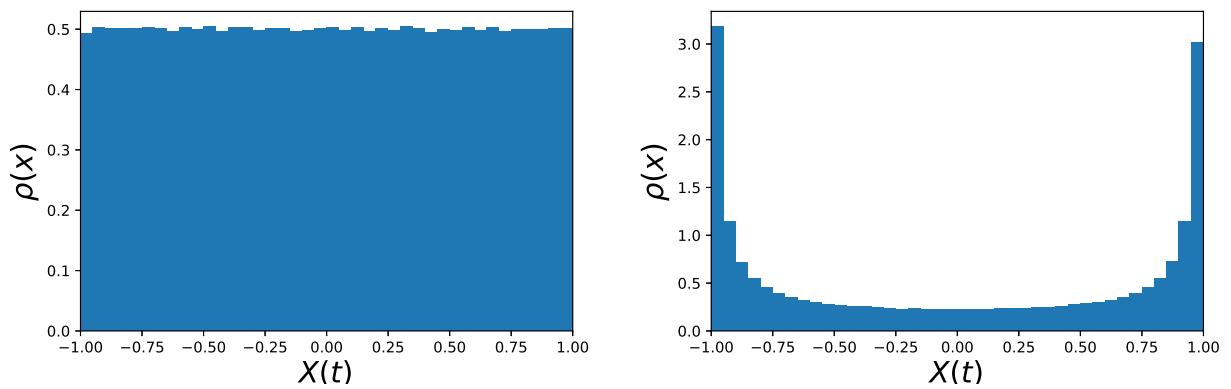


図10 不変測度  $\rho(x)$ . (a) ベルヌーイ写像  $B = 1.0$ , (b) 変形ベルヌーイ写像  $B = 2.0$

## 参考文献

- [1] K. Kaneko, Prog. Theor. Phys. **72**, 480 (1984)
- [2] K. Kaneko, Physica D, **41**, 137 (1990).
- [3] K. Kaneko, Chaos **2**, 279 (1992).
- [4] L. M. Pecora and T.L. Carroll, Phys. Rev. Lett., **64**, 821 (1990).
- [5] M. Kawasaki and S. Sasa, Phys. Rev. E **72**, 037202 (2005).
- [6] R. V. Sole, Chaos **2**, 387 (1992).
- [7] S. Raghavachari and J. A. Glazier, Phys. Rev. Lett. **74**, 3297 (1995).
- [8] K. Krischer and A. Mikhailov, Phys. Rev. Lett. **73**, 3165 (1994).
- [9] J. R. Sanchez et al., Eur. Phys. J. Special Topics **143**, 241 (2007).
- [10] F. Schweitzer, Physics Today **71**, 40 (2018).
- [11] A. Garas et al., Sci. Rep. **2** 402 (2012).
- [12] Y. Aizawa and T. Kouyama, Kyoto Summer Institute " *Chaos and Statistical Mechanics* " ed. Y.Kuramoto (Springer) (1983).
- [13] Y. Aizawa and T.Kouyama, Prog. Theor. Phys. **71**, 847 (1984).
- [14] C. W. J. Granger, Econometrica. **37**, 424 (1969).
- [15] T. Schreiber, Phys. Rev. Lett. **85**, 461 (2000).
- [16] M. Oizumi, N. Tsuchiya, and S-I. Amari, Proc. Natl. Acad. Sci. USA **113**, 14817 (2016).
- [17] J. M. R. Parrondo, J. M. Horowitz, and T. Sagawa, Nat. Phys. **11**, 131 (2015).
- [18] R. Marschinski and H. Kantz, Eur. Phys. J. B **30**, 275 (2002).
- [19] R. G. James, N. Barnett, and J. P. Crutchfield Phys. Rev. Lett. **116**, 238701 (2016).
- [20] Y. Aizawa, Y. Kikuchi, T. Harayama, K. Yamamoto, M. Ota and K. Tanaka, Prog. Theor. Phys. Suppl. **98**, 36 (1989).

(原稿提出: 2020 年 2 月 13 日; 修正稿提出: 2020 年 2 月 17 日)