

双安定性をもつある非線形差分方程式について

著者	岡本 和也, 友枝 明保
雑誌名	武蔵野大学数理工学センター紀要
号	5
ページ	27-33
発行年	2020-03-01
URL	http://id.nii.ac.jp/1419/00001266/

双安定性をもつある非線形差分方程式について

A nonlinear difference equation with bistability

岡本和也¹

Kazuya Okamoto

友枝明保²

Akiyasu Tomoeda

概要

本論文では、双安定性をもつ新しい非線形差分方程式を提案する。提案する非線形差分方程式の数値実験を行ったところ、擾乱の振幅の大きさによって一様流へ収束する場合と非一様な進行波へ収束する場合が観察された。このことから、提案する非線形差分方程式は双安定性をもつことが示唆される。最適速度モデル (Optimal Velocity モデル) などの交通流を記述する数理モデルでは、一様流のみが安定となる密度領域と渋滞流 (非一様流) のみが安定となる密度領域に加えて、一様流と非一様流がともに安定 (双安定) となる密度領域の存在が知られていることから、本論文で提案する非線形差分方程式は、新しい交通流モデルとなりうるということが明らかとなった。

1 はじめに

高速道路では、事故などの原因がないのに、いつのまにか発生してしまう自然渋滞が日常的に観測されている。交通流の数理モデル研究の興味の一つは、この自然渋滞の形成メカニズムを数理的に理解することであり、これまでも様々な数理モデル研究が展開されてきた [1]。その中でも、個々の車の前車への追従挙動を常微分方程式で記述した数理モデルは追従モデルと呼ばれ、その代表的なモデルが、最適速度モデル (Optimal Velocity モデル) である [2]。最適速度モデルは、自然渋滞の形成メカニズムを動力的観点から説明することに成功したモデルの一つであり、車両密度の変化によって車の流れの安定性が変化し、その結果として自然渋滞が発生すると理解される。つまり、スムーズな流れ (一様流) は車両密度が低い場合は安定だが、臨界密度を超えて高くなると不安定になって維持されなくなり、他の安定な流れ (非一様流) へと遷移し、それが自然渋滞として観測される、というわけである。さらに最適速度モデルでは、一様流解のみが安定となる密度領域と一様流解は不安定で非一様流解のみが安定となる密度領域に加えて、一様流解と非一様流解がともに安定 (双安定) となる密度領域が存在することも知られている [1]。一方で、追従モデル以外にも、交通流を記述する数理モデルとして、Burgers 方程式に代表される流体力学に基づいたモデル [3]、ルール 184ECA (Elementary Cellular Automaton) に代表されるセルオートマトンを用いたモデル

¹ 武蔵野大学大学院 工学研究科数理工学専攻 修士 1 年

² 武蔵野大学工学部数理工学科 准教授 / 武蔵野大学数理工学センター員

[4] などが挙げられる．特に，ルール 184ECA は，Burgers 方程式から超離散化という手続きを通じて導出される超離散 Burgers 方程式の特別な場合に対応していること [4] やモデル変数の Euler-Lagrange 変換を考えることで最適速度モデルとの形式的な対応も示されていること [5] もあり，現象を記述する数理モデル同士の対応から，共通した数理構造を抽出し，現象の本質に迫ることも数理モデル研究の重要なミッションの一つであると考えている．

このような背景のもと，微分方程式などの連続の世界と，セルオートマトンなどの超離散の世界との対応を考えることも見据えて，本論文では，ある新しい非線形差分方程式を提案し，その解の振る舞いを数値実験によって調べたので報告する．本論文の構成は次のとおりである．まず第 2 章では，本論文で提案する非線形差分方程式を構築するヒントとなった非線形離散交通流モデル [6] について，双安定性という観点で検討した結果について述べる．次に第 3 章では，新しい非線形差分方程式を提案し，あるパラメータ領域において解が双安定性をもつことを数値実験によって示す．最後に第 4 章でまとめと今後の課題について述べる．

2 非線形離散交通流モデル [6] の解の振る舞い

本章では，我々のモデルのヒントとなった非線形離散交通流モデル [6] とその双安定性について検討した結果を述べる．このモデルは場所 x ，時刻 t における交通密度 $\rho(x, t)$ の変化を記述するモデルであり，次のような差分方程式で与えられる．

$$\rho_x^{t+\Delta t} = \rho_x^t - \rho_x^t(1 - \rho_{x+\Delta x}^t) + \rho_{x-\Delta x}^t(1 - \rho_x^t) \quad (1)$$

ここで， $\Delta x, \Delta t$ はそれぞれ時間と空間の刻み幅であり，ここでは， $\rho_x^t := \rho(x, t)$ と記載した．この離散モデル (1) は，台数保存則と車群の前方視認性に関する仮定を用いて構成されており，連続近似を行うとある条件のもとで Burgers 方程式に移行することが示されている [6]．

本研究における我々の興味の一つは双安定性にあるので，ここではまず，離散交通流モデル (1) を線形化し，一様流の安定性について考える．(1) は自明な解として一様流解 $\rho_x^t = \rho_0 = \text{const.}$ を持つ．一様流解に微小擾乱が加わったと考え，

$$\rho_x^t = \rho_0 + \tilde{\rho}_x^t \quad (2)$$

とおき，(1) を線形化すると次の方程式が得られる．

$$\tilde{\rho}_x^{t+\Delta t} = \tilde{\rho}_{x-\Delta x}^t + \rho_0(\tilde{\rho}_{x+\Delta x}^t - \tilde{\rho}_{x-\Delta x}^t) \quad (3)$$

ここで， $x = n\Delta x, t = s\Delta t, (n, s \in \mathbb{N})$ とし，周期境界条件の下で (3) を書き直すと，次のよ

うなマルコフ連鎖としてダイナミクスを考えることができる .

$$\begin{pmatrix} \tilde{\rho}_0^{s+1} \\ \tilde{\rho}_1^{s+1} \\ \tilde{\rho}_2^{s+1} \\ \vdots \\ \tilde{\rho}_{n-2}^{s+1} \\ \tilde{\rho}_{n-1}^{s+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \rho_0 & 0 & \cdots & 0 & 1 - \rho_0 \\ 1 - \rho_0 & 0 & \rho_0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 - \rho_0 & 0 & \ddots & \vdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 - \rho_0 & 0 & \rho_0 \\ \rho_0 & 0 & \cdots & 0 & 1 - \rho_0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\rho}_0^s \\ \tilde{\rho}_1^s \\ \tilde{\rho}_2^s \\ \vdots \\ \tilde{\rho}_{n-2}^s \\ \tilde{\rho}_{n-1}^s \end{pmatrix} \quad (4)$$

ここで ,

$$\mathbf{\Pi}(t) = (\tilde{\rho}_0^s, \tilde{\rho}_1^s, \cdots, \tilde{\rho}_{n-1}^s), \quad (5)$$

$$P_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & \rho_0 & 0 & \cdots & 0 & 1 - \rho_0 \\ 1 - \rho_0 & 0 & \rho_0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 - \rho_0 & 0 & \ddots & \vdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 - \rho_0 & 0 & \rho_0 \\ \rho_0 & 0 & \cdots & 0 & 1 - \rho_0 & 0 \end{pmatrix} \quad (6)$$

とおくと , (4) は

$$\mathbf{\Pi}(s+1) = P_{ij} \mathbf{\Pi}(s) \quad (7)$$

と表すことができ , すべての $i, j = 1, 2, 3, \cdots, n$ について

$$P_{ij} > 0 \quad \text{かつ} \quad \sum_i P_{ij} = 1 \quad (8)$$

を満たすため , P_{ij} は遷移確率行列となっていることがわかる . また , 各 i, j の組 ($1 \leq i, j \leq n, i \neq j$) について , ある大きな整数 N をとって

$$(P^N)_{ij} > 0 \quad (9)$$

とできるため , P_{ij} は既約であることもわかる . 既約な確率遷移行列の性質から , P_{ij} の固有値の絶対値は 1 以下となり , しかも P_{ij} は単純固有値 1 を持つことから , 十分時間が経った後 , 微小擾乱 $\mathbf{\Pi}(s)$ の定常分布は一意に定まることが示される . つまり , 線形化された離散モデル (3) は , 初期条件が何であっても , 定常状態が一意に存在することがわかる .

次に , 離散モデル (1) について , いくつかの数値実験を行い , 数値解の振る舞いを観察する . $x = n\Delta x, t = s\Delta t, (n, s \in \mathbb{N})$ とし , 初期値として ρ_n^0 を次のように与える .

$$\rho_n^0 = \bar{\rho} + \varepsilon \sin \frac{2\pi n}{L} \quad (10)$$

ここで , $\bar{\rho}$ は平均密度 , L は計算対象とする区間 $[0, L]$ の長さ , ε は擾乱の振幅を表す . 図 1 が $L = 100$, 計算時間を $T = 10000$ ステップとし , $\bar{\rho}$ と ε をそれぞれ変えたときの $T = 10000$ での数値解を分類した図である . 図 1 を見る限り , 離散モデル (1) は初期値 (10) の下では , 平

均密度 $\bar{\rho}$ の一様流解に収束し，双安定性をもたない可能性が示唆された．数値計算例として， $(\bar{\rho}, \varepsilon) = (0.5, 0.1)$ ， $(0.5, 0.3)$ のそれぞれの場合を図 2 に示す．初期擾乱の振幅の大きさに関係なく，一様流に収束していることがわかる．

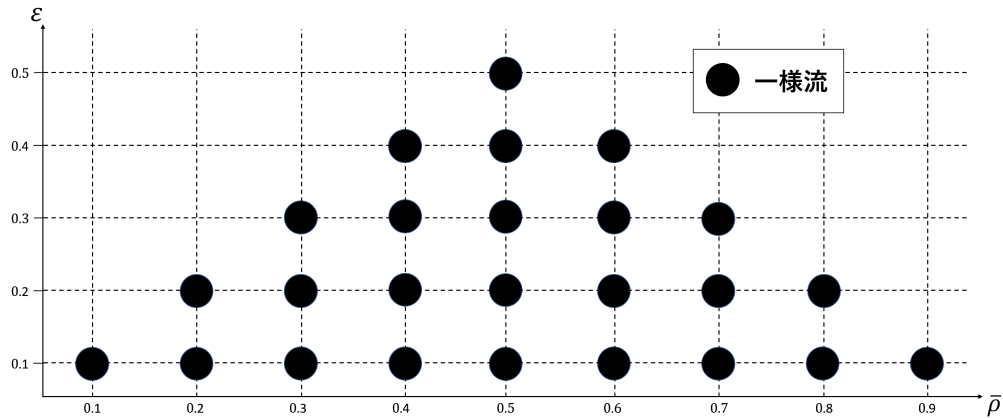
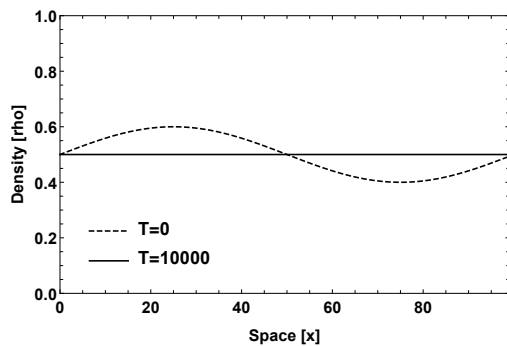
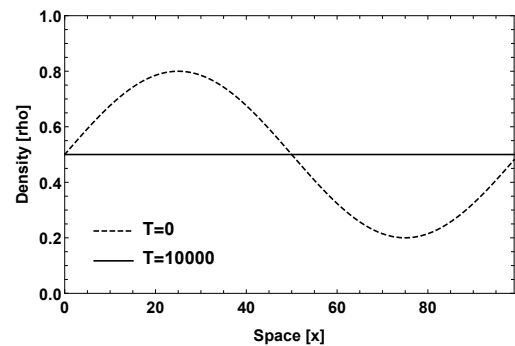


図 1 離散モデル (1) に対して，平均密度 $\bar{\rho}$ と擾乱の振幅 ε をそれぞれ変更したときの $T = 10000$ での数値解の分類図．



(a) $(\bar{\rho}, \varepsilon) = (0.5, 0.1)$



(b) $(\bar{\rho}, \varepsilon) = (0.5, 0.3)$

図 2 各 $(\bar{\rho}, \varepsilon)$ における離散モデル (1) に対する数値計算結果．破線が初期値で，実線が $T = 10000$ での数値解をプロットしたものである．

3 新しい非線形差分方程式とその数値実験

前章での結果をふまえて，本章では次のような新しい非線形差分方程式を提案する．

$$\begin{aligned} \rho_x^{t+\Delta t} = & \rho_x^t - \rho_x^t(1 - \rho_{x+\Delta x}^t) \left\{ 1 - \left((1 - \alpha)\rho_x^{t-\Delta t} + \alpha\rho_{x+\Delta x}^{t-\Delta t} \right) \right\} \\ & + \rho_{x-\Delta x}^t(1 - \rho_x^t) \left\{ 1 - \left((1 - \alpha)\rho_{x-\Delta x}^{t-\Delta t} + \alpha\rho_x^{t-\Delta t} \right) \right\} \end{aligned} \quad (11)$$

ここでパラメータ α は時刻 $t - \Delta t$ における場所 x と $x + \Delta x$ での空間平均を考える際の重みを表し，本論文の以降の数値実験では $\alpha = 0.2$ と設定した．非線形差分方程式 (11) は台数保

存則を満たし, 交通流モデルとして解釈する場合, 離散モデル (1) と大きく異なる点は, 時刻 $t - \Delta t$ の項を含むところにあり, 場所 x と $x + \Delta x$ での重み付き平均密度を時刻 $t - \Delta t$ において考慮している点である. つまり, 前方の空きに比例して移動する前方視認性に加えて, 過去の空間平均密度に対する空きも考慮して移動するモデルとして解釈できる.

ここでは, 非線形差分方程式 (11) について, いくつかの数値実験を行い, 数値解の振る舞いについて議論する. $x = n\Delta x, t = s\Delta t, (n, s \in \mathbb{N})$ とし, 非線形差分方程式 (11) は過去二時刻 $s, s - 1$ の情報を用いて, 次の時刻 $s + 1$ を計算するので, 初期値として ρ_n^0, ρ_n^1 を次のように与える.

$$\rho_n^0 = \rho_n^1 = \bar{\rho} + \varepsilon \sin \frac{2\pi n}{L} \quad (12)$$

前章と同様, $L = 100$ とし, 計算時間を $T = 10000$ ステップまで行い, $\bar{\rho}$ と ε をそれぞれ変えたときの $T = 10000$ での数値解を分類した図が図 3 である. 図 3 を見る限り, 図 1 とは異なり, 四角で示したパラメーターの組み合わせにおいて, 非一様流が観察された. さらに, 平均密度が低いときは一様流となる傾向にあり, 平均密度が高いときは非一様流になる傾向があることもわかった. 特に, 平均密度が $\bar{\rho} = 0.5$ のときは, ε が小さい場合は一様流に, ε が大きい場合は非一様流へと収束することが確認され, 同じ平均密度であっても, ε の大きさによって二つの安定な状態が存在しうることが数値計算から明らかとなった. これはまさに, 非線形差分方程式 (11) が双安定性をもつことを示しており, 交通流を記述する新しいモデルとなる可能性が示唆された. 数値計算例として, $(\bar{\rho}, \varepsilon) = (0.5, 0.1), (0.5, 0.3)$ のそれぞれの場合を図 4 に示す. 初期擾乱の振幅が小さい場合は一様流に収束し, 振幅が大きい場合は非一様流を形成することがわかる. 実際, 後者の非一様流が観察された場合の $T = 10000$ に至るまでの様子を示したものが図 5 であり, さらに, 長時間経過後の非一様流の振る舞いの時間変化を示したものが図 6 である. 図 5 から, $T = 10000$ で既にほぼ一定の形状で左向きに移動する様子が観察され, 図 6 では, 十分時間が経ったあとも形を変えずに移動し続け, 安定に存在していることがわかる. このことから, この非一様流はある安定な進行波となっている可能性が高く, 非線形差分方程式 (11) に進行波解が存在することが示唆された.

4 まとめ

本論文では, 双安定性をもつ新しい非線形差分方程式 (11) を提案した. この差分方程式について数値実験を行ったところ, 平均密度 $\bar{\rho}$ が低いときは一様流となり, 平均密度が高いときは非一様な進行波となる様子が観察された. 特に, 平均密度が $\bar{\rho} = 0.5$ のときは, 同じ平均密度であっても擾乱の振幅の大きさによって一様流に収束していく場合と非一様な進行波へと収束する場合が観察され, 交通流モデルとして考える際に重要な双安定性を持つ方程式であることが示唆された. この非線形差分方程式は, 前方視認性だけでなく過去の状態における空間の重み付き平均密度も考慮した交通流モデルとして解釈できるが, 現時点では後者の要因を裏付ける実データは確認されておらず, 数理モデルの解釈を正当化するデータの検証が今後の課題

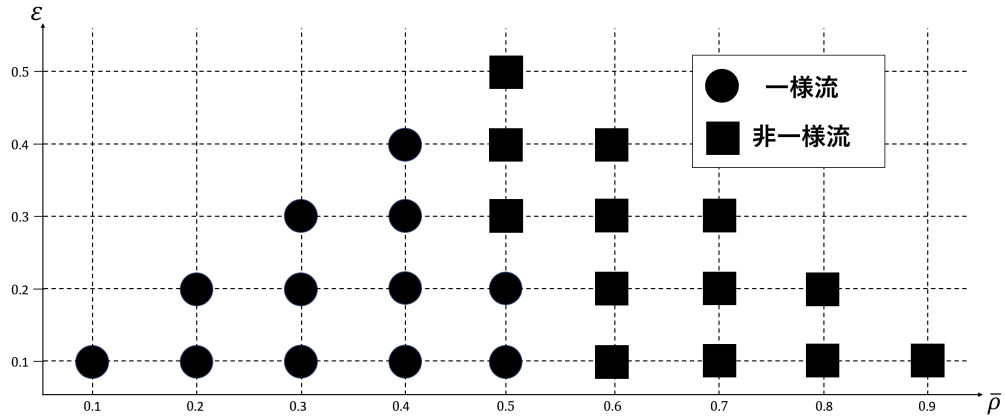
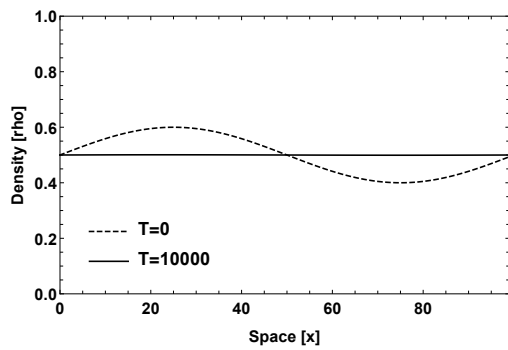
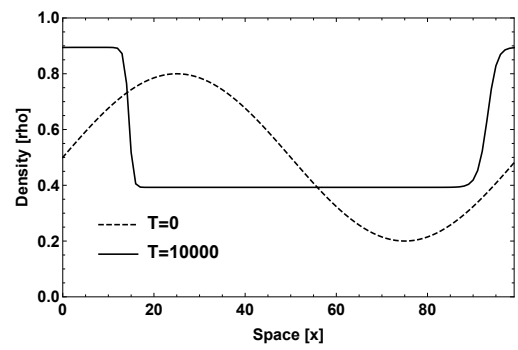


図3 非線形差分方程式 (11) に対して、平均密度 $\bar{\rho}$ と擾乱の振幅 ε をそれぞれ変更したときの $T = 10000$ での数値解の分類図。

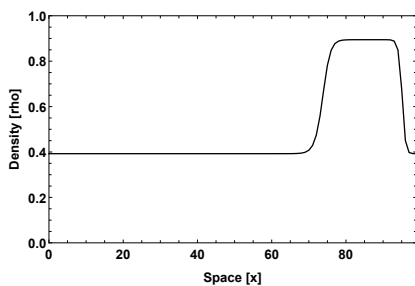


(a) $(\bar{\rho}, \varepsilon) = (0.5, 0.1)$

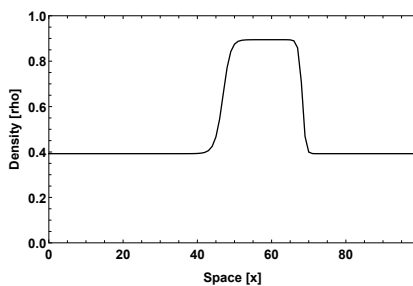


(b) $(\bar{\rho}, \varepsilon) = (0.5, 0.3)$

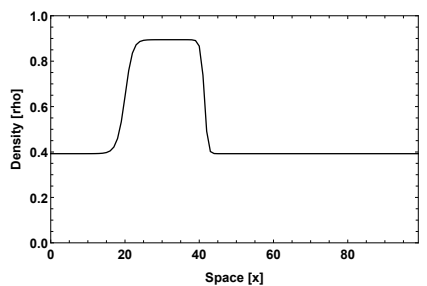
図4 各 $(\bar{\rho}, \varepsilon)$ における非線形差分方程式 (11) に対する数値計算結果。破線が初期値で、実線が $T = 10000$ での数値解をプロットしたものである。



(a) $T = 9700$



(b) $T = 9800$



(c) $T = 9900$

図5 $(\bar{\rho}, \varepsilon) = (0.5, 0.3)$ における非線形差分方程式 (11) に対して観察された非一様流解の時間変化。

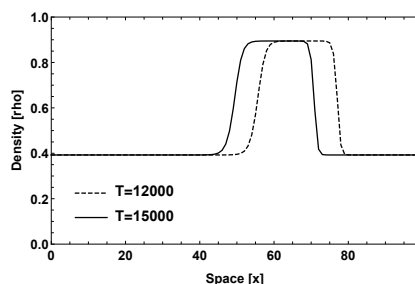


図 6 $(\bar{\rho}, \varepsilon) = (0.5, 0.3)$ における非線形差分方程式 (11) に対して観察された非一様流解の長時間経過後の比較. $T = 12000$ と $T = 15000$ で空間が少しだけずれているが, これは周期境界条件によるものであり, 実際は何周も回っており, 十分な距離を移動している.

となっている. また, 本論文の第 2 章の理論計算では, 武蔵野大学工学部松家敬介講師から有益なご助言を頂いた. ここに同氏に対する感謝の意を表する.

参考文献

- [1] 杉山 雄規, 交通流の物理, *ながれ*, **22**, (2003), 95-108.
- [2] M. Bando, et al., Dynamical model of traffic congestion and numerical simulation, *Phys. Rev. E*, **51**, (1995), 1035.
- [3] T. Musha and H. Higuchi, Traffic current fluctuation and the Burgers equation, *J. J. App. Phys.*, **17**, (1978), 811–816.
- [4] K. Nishinari and D. Takahashi, Analytical properties of ultradiscrete Burgers equation and rule-184 cellular automaton, *J. Phys. A: Math. Gen.*, **31**, 5439-5450 (1998)
- [5] J. Matsukidaira and K. Nishinari, Euler-Lagrange Correspondence of Cellular Automaton for Traffic-Flow Models, *Phys. Rev. Lett.*, **90**, 088701 (2003)
- [6] 東 康平, 糠谷 樹, 薩摩 順吉, 友枝 明保, 武蔵野大学数理工学センター紀要 第 4 号, (2019), 42–49.

(原稿提出: 2020 年 1 月 14 日; 修正稿提出: 2020 年 2 月 14 日)