

## 交通流を記述する新しい非線形離散モデルについて

著者	東 康平, 糠谷 樹, 薩摩 順吉, 友枝 明保
雑誌名	武蔵野大学数理工学センター紀要
号	4
ページ	42-49
発行年	2019-03-01
URL	<a href="http://id.nii.ac.jp/1419/00001065/">http://id.nii.ac.jp/1419/00001065/</a>

# 交通流を記述する新しい非線形離散モデルについて

## On a new nonlinear discrete model describing traffic flow

東 康 平<sup>1</sup>

Kohei Higashi

糠 谷 樹<sup>1</sup>

Tatsuki Nukaya

薩 摩 順 吉<sup>2</sup>

Junkichi Satsuma

友 枝 明 保<sup>3</sup>

Akiyasu Tomoeda

### 概要

本論文では、交通流を記述する新しい離散モデルを提案する。この離散モデルは、車の台数保存則と車群の前方認識性に関する仮定を用いて構成され、連続近似を行うとある条件のもとで Burgers 方程式に移行することが示される。さらに、車群の前方認識性に関する拡張を行い、見通し効果を持った離散モデルも提案し、両モデルの数値実験の結果について考察を行う。

## 1 はじめに

交通流を記述する方法として、流体力学をもとにし、車の動きを連続流として近似するものがある。その代表的なものが、Burgers 方程式

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + V_{\max} \left( 1 - 2 \frac{\rho}{\rho_{\max}} \right) \frac{\partial \rho}{\partial x} = D \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} \quad (1)$$

で記述されるものである [1]。ここで、 $\rho$  はある時刻  $t$  における場所  $x$  での交通密度  $\rho(x, t)$  を表し、 $V_{\max}$  は密度が限りなく小さい状況で走行する車の最高速度であり、 $\rho_{\max}$  は車が完全に停止してしまう交通密度を表し、 $D$  は拡散係数である。

車の速度を  $v(x, t)$  とおくと、車の台数保存則は、

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho v) = 0 \quad (2)$$

で与えられる。車の速度は交通密度と交通密度の勾配に依存するという仮定を導入する。すな

---

<sup>1</sup> 武蔵野大学工学部数理工学科 B4

<sup>2</sup> 武蔵野大学工学部数理工学科 教授 / 武蔵野大学数理工学センター長

<sup>3</sup> 武蔵野大学工学部数理工学科 准教授 / 武蔵野大学数理工学センター員

わち,  $\rho \neq 0$  として,

$$v = V_{\max} \left( 1 - \frac{\rho}{\rho_{\max}} \right) - \frac{D}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} \quad (3)$$

という形を採用し, (3) を (2) に代入することにより, (1) が得られるというわけである. なお, (3) の右辺第二項の交通密度の勾配に依存するという項がないと, 安定な衝撃波が形成されないため, 渋滞という現象を記述することができなくなってしまふ. つまり, 衝撃波を安定化させるために, 右辺第二項が必要となっているのである.

本論文では, 交通流を記述する新しい離散モデルを提案する. 第2章では, 車の台数保存則と車群の前方認識性に関する仮定を用いた離散モデルを構成し, 連続近似を行うとある条件のもとで Burgers 方程式に移行することを示す. 第3章では, 車群の前方認識性に関する拡張を行い, 見通し効果を持った離散モデルを提案し, 第4章では, 両モデルの数値実験の結果について考察を加える. 最後に, 第5章では今後の課題について述べる.

## 2 離散モデルの導出と連続近似

ここでは車群の前方認識性を仮定し, 台数保存則を用いて, 道路を進む車群の時間発展を記述する離散的な交通流数理モデルを構成する. 道路を1次元空間とみなし, 道路と時間をそれぞれ幅  $\Delta x, \Delta t$  で刻み,  $x = i\Delta x, t = k\Delta t, i, k \in \mathbb{Z}$  とする. また, 時刻  $t$  のとき, 区間  $x \sim x + \Delta x$  に存在する車の台数を  $N(x, t)$  とする. さらに,  $N(x, t)$  のうち, 時間  $\Delta t$  が経過したとき, 次の区間  $x + \Delta x \sim x + 2\Delta x$  に進む車の割合を  $b(x, t)$  とする (図1). ここで, 車群は後進しないと仮定する.

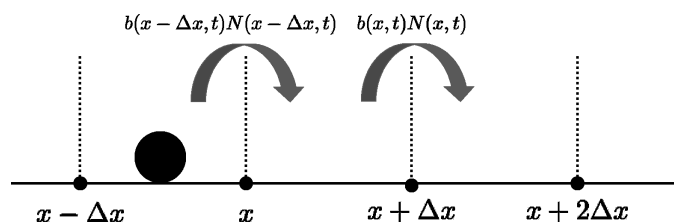


図1 区間を移動する車の台数の表現.

時間  $\Delta t$  が経過したのち, 区間  $x \sim x + \Delta x$  に存在する車の台数は

$$N(x, t + \Delta t) = N(x, t) - b(x, t)N(x, t) + b(x - \Delta x, t)N(x - \Delta x, t) \quad (4)$$

と表される. 次に,  $b(x, t)$  の函数形を考える. 各区間で収容可能な車の最大台数を  $N_{\max}$  とする. 区間  $x + \Delta x \sim x + 2\Delta x$  に車が存在しなければ  $b(x, t) = 1$ , 車が  $N_{\max}$  台存在すれば  $b(x, t) = 0$  とし, この二つの条件を満たす最も簡単な函数として

$$b(x, t) = 1 - \frac{N(x + \Delta x, t)}{N_{\max}} \quad (5)$$

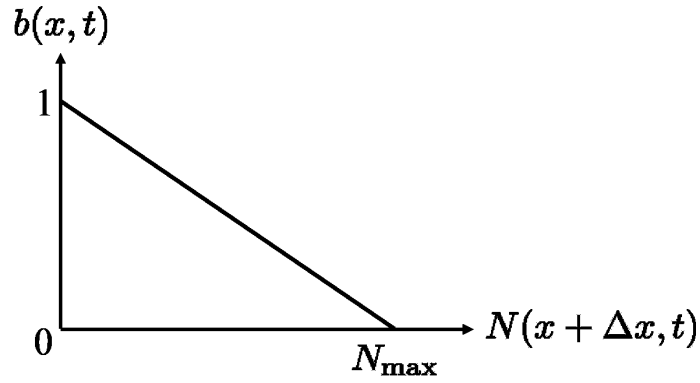


図2  $b$  の函数形 .

を採用する (図2) .

この函数 (5) を (4) に代入すると ,

$$N(x, t + \Delta t) = N(x - \Delta x, t) + \frac{N(x, t)}{N_{\max}} (N(x + \Delta x, t) - N(x - \Delta x, t)) \quad (6)$$

を得る . 式を簡潔に表記するために ,  $\rho(x, t) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{N(x, t)}{N_{\max}}$  と変数変換すると , (6) は

$$\rho(x, t + \Delta t) = \rho(x - \Delta x, t) + \rho(x, t)(\rho(x + \Delta x, t) - \rho(x - \Delta x, t)) \quad (7)$$

となる . (7) が交通密度  $\rho(x, t)$  に対する離散モデルである . なお , このモデルでは , 導出から明らかに  $0 \leq \rho(x, t) \leq 1$  である .

この離散モデルの連続近似を考える . (7) の  $\rho$  を時間と空間について Taylor 展開すると

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} + \mathcal{O}(\Delta t^2) = \frac{\Delta x}{\Delta t} (2\rho - 1) \frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{\Delta x^2}{2\Delta t} \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} + \mathcal{O}(\Delta x^2) \quad (8)$$

となる . 時間  $\Delta t$  の間に  $\Delta x$  進むときが最高速度  $V_{\max}$  に相当することを考慮し ,  $\frac{\Delta x}{\Delta t} = V_{\max}$  を有限に保ったまま ,  $\Delta x \rightarrow 0, \Delta t \rightarrow 0$  とし , 2 次以上の項を無視すると ,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} = V_{\max} (2\rho - 1) \frac{\partial \rho}{\partial x} + V_{\max} \frac{\Delta x}{2} \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} \quad (9)$$

が得られる . さらに ,  $V_{\max}$  が十分に大きいと仮定すると , 相対的に  $\Delta t$  より  $\Delta x$  の方が大きい . ため ,  $\rho_{tt}$  を含む項を無視でき , Burgers 方程式

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = V_{\max} (2\rho - 1) \frac{\partial \rho}{\partial x} + D \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} \quad (10)$$

を得る . ただし ,  $D \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\Delta x^2}{2\Delta t}$  である .

### 3 見通し効果を持った離散モデルへの拡張

薩摩と友枝は, [2] において交通流の解析を目的として, Burgers 方程式の拡張となるある非局所非線形方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} - k \frac{\partial}{\partial x} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\delta} \coth \frac{\pi}{2\delta} (x-y) u(y) dy \cdot u(x) \right] - D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad (11)$$

を提案した. この方程式に対して,  $u = \frac{\partial \rho}{\partial x}$ ,  $k = 2\delta V_{\max}$  と置き,  $x$  について 1 回積分することで

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = V_{\max} \left( \int_{-\infty}^{\infty} \coth \frac{\pi}{2\delta} (x-y) \frac{\partial \rho}{\partial y} (y) dy + I - 1 \right) \frac{\partial \rho}{\partial x} + D \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} \quad (12)$$

を得る. ただし,  $\rho(\pm\infty, t) = \text{const.}$  と仮定し,  $I \stackrel{\text{def}}{=} \rho(-\infty, t) + \rho(\infty, t)$  と書き, 積分の後に移流項  $V_{\max}(I-1)\rho_x$  を付け加えた. なお,  $\delta \rightarrow +0$  の極限で  $\coth \frac{\pi}{2\delta} (x-y) \rightarrow \text{sgn}(x-y)$  であるから, (12) は Burgers 方程式 (10) に帰着する.

ここで, (12) の離散化を考える. 時間 1 階微分に対して前進差分

$$\frac{1}{\Delta t} \left( \rho(x, t + \Delta t) - \rho(x, t) \right)$$

空間 1 階微分に対しては中心差分

$$\frac{1}{2\Delta x} \left( \rho(x + \Delta x, t) - \rho(x - \Delta x, t) \right)$$

空間 2 階微分に対しては中心差分

$$\frac{1}{\Delta x^2} \left( \rho(x + \Delta x, t) - 2\rho(x, t) + \rho(x - \Delta x, t) \right)$$

積分核に関しては  $-\infty \sim x$  と  $x \sim \infty$  に分け Riemann 和をとるが,  $\rho_y$  を前者は前進差分, 後者は後進差分をとる. また,  $V_{\max} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$ ,  $D = \frac{\Delta x^2}{2\Delta t}$  とし, (12) を書き換えると,

$$\begin{aligned} \rho(x, t + \Delta t) = & \rho(x - \Delta x, t) + \left( \sum_{j:i>j} \coth \frac{\pi \Delta x}{2\delta} (i-j) (\rho((j+1)\Delta x, t) - \rho(j\Delta x, t)) \right. \\ & + \sum_{j:i<j} \coth \frac{\pi \Delta x}{2\delta} (i-j) (\rho(j\Delta x, t) - \rho((j-1)\Delta x, t)) + I \\ & \left. \times \frac{\rho(x + \Delta x, t) - \rho(x - \Delta x, t)}{2} \right) \quad (13) \end{aligned}$$

となる. ただし, 右辺の総和記号  $\sum_{j:i>j}$  は,  $i > j$  を満たすすべての  $j$  についての和を表し,

$\sum_{j:i<j}$  は,  $i < j$  を満たすすべての  $j$  についての和を表す. なお, (12) と同様, (13) は  $\delta \rightarrow +0$  の極限で (7) に移行する.

離散モデル (7) では, ある区間から出て行く車の台数は, 一つ前方の区間に存在する車の台数のみで決まっていたが, (13) では車群の前方認識性に関する拡張を行っており, さらに先の区間まで認識している. すなわち, (13) は見通し効果を持った離散モデルとなっている.

## 4 離散モデルの数値実験とその結果に対する考察

### 4.1 (7) の数値実験

離散モデル (7) の数値実験を行う. 具体的には次の初期値・境界値問題を考える.

$$\begin{cases} \rho(x, t + \Delta t) = \rho(x - \Delta x, t) + \rho(x, t)(\rho(x + \Delta x, t) - \rho(x - \Delta x, t)) & (x, t) \in [-L, L] \times [0, \infty) \\ \rho(-L, t) = 0.5 & t \in (0, \infty) \\ \rho(L, t) = 0.9 & t \in (0, \infty) \\ \rho(x, 0) = f(x) & x \in [-L, L] \end{cases}$$

ここで,  $f(x) = 0.2 \tanh 2x + 0.7$  とし,  $\Delta x = 0.1$ ,  $\Delta t = 0.1$ ,  $L = 10$  とした数値実験の結果を図 3 に示す. 図 3 中のドットは離散点における  $\rho$  の値を表し, 曲線は離散点をつないだ折れ線である. 青線は初期値  $f(x)$  の値で, それ以外は時間発展後の  $\rho$  の値をプロットしたものである. 時間発展とともに, 初期値はある滑らかな進行波解に変化していく様子が見てとれる. この進行波解は離散モデルが持っている定常解であると考えられる.

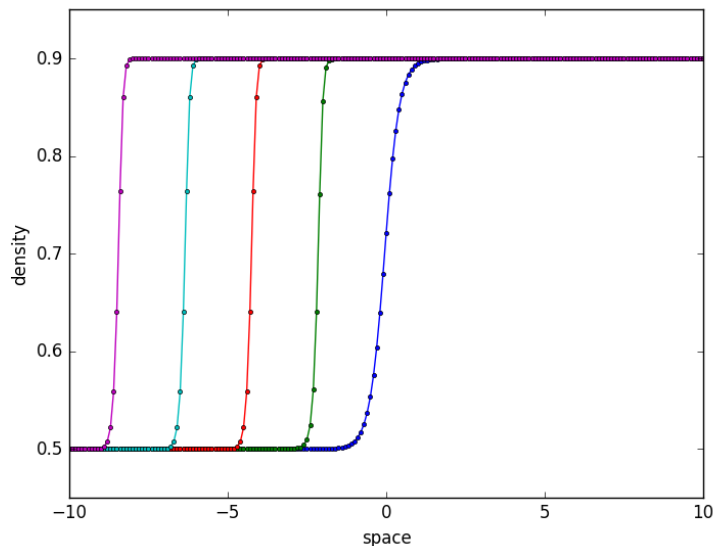


図 3 離散モデル (7) の時間発展. 右からそれぞれ  $t = 0.0$ ,  $t = 4.0$ ,  $t = 8.0$ ,  $t = 12.0$ ,  $t = 16.0$  における  $\rho$  の値をプロットしたものである.

## 4.2 (13) の数値実験

離散モデル (13) の数値実験を行う．具体的には次の初期値・境界値問題を考える．

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho(x, t + \Delta t) = \rho(x - \Delta x, t) \\ \quad + \left( \sum_{j:i>j} \coth \frac{\pi \Delta x}{2\delta} (i - j) (\rho((j + 1)\Delta x, t) - \rho(j\Delta x, t)) \right. \\ \quad + \sum_{j:i<j} \coth \frac{\pi \Delta x}{2\delta} (i - j) (\rho(j\Delta x, t) - \rho((j - 1)\Delta x, t)) + I \\ \quad \times \frac{\rho(x + \Delta x, t) - \rho(x - \Delta x, t)}{2} \quad \left. (x, t) \in [-L, L] \times [0, \infty) \right) \\ \rho(-L, t) = 0.5 \quad t \in (0, \infty) \\ \rho(L, t) = 0.9 \quad t \in (0, \infty) \\ \rho(x, 0) = g(x) \quad x \in [-L, L] \end{array} \right.$$

ここで，初期値  $g(x)$  は，(7) の定常解と考えられる  $t = 12.0$  での  $\rho$  の値を採用した．各パラメータは  $\Delta x = 0.1$ ,  $\Delta t = 0.1$ ,  $L = 10$  とし， $\delta$  を 0.1, 0.2, 0.3 としたときの数値実験の結果をそれぞれ図 4, 図 5, 図 6 に示す．ただし，和  $\sum_j$  の計算では  $-L \leq x \leq L$  の設定から， $x = j\Delta x - L$  を満たす  $j$  を考え， $0 < j < 200$  とした．各図におけるドットは離散点における  $\rho$  の値を表し，曲線は離散点をつないだ折れ線である．青線は初期値  $g(x)$  の値で，それ以外は時間発展後の  $\rho$  の値をプロットしたものである．

$\delta$  の値が増えるにつれて，進行波の波面の勾配が大きくなることが見てとれる．

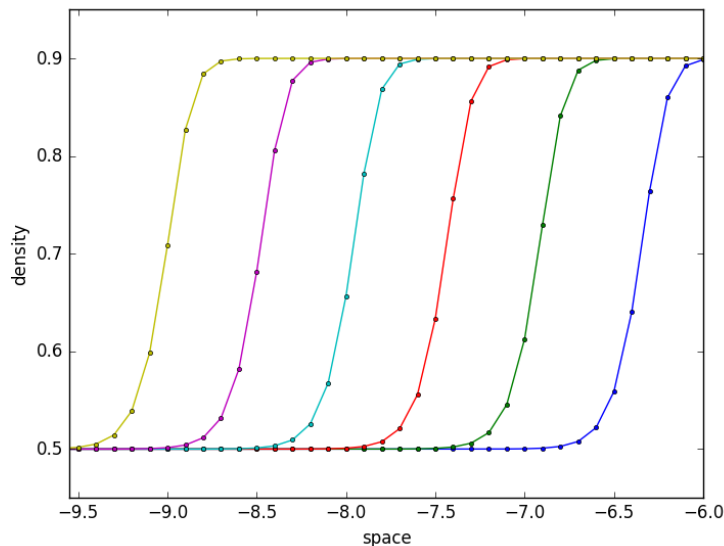


図 4 離散モデル (13) の時間発展 ( $\delta = 0.1$ ) . 右からそれぞれ  $t = 0.0$ ,  $t = 1.0$ ,  $t = 2.0$ ,  $t = 3.0$ ,  $t = 4.0$ ,  $t = 5.0$  における  $\rho$  の値をプロットしたものである .

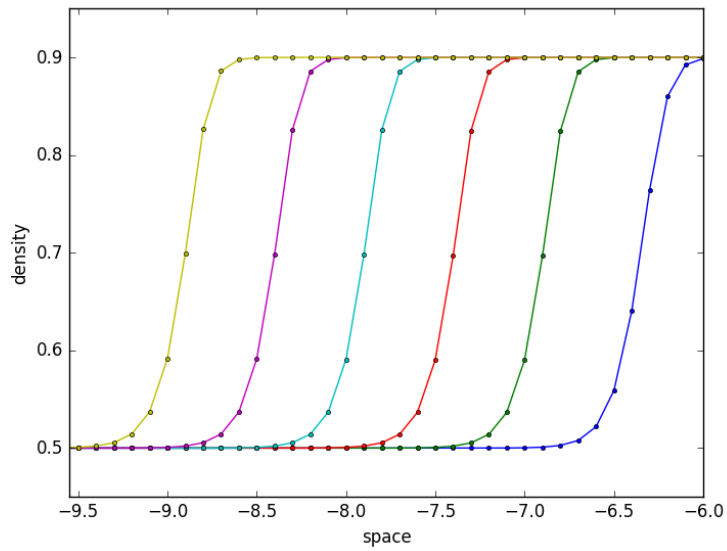


図 5 離散モデル (13) の時間発展 ( $\delta = 0.2$ ) . 右からそれぞれ  $t = 0.0$ ,  $t = 1.0$ ,  $t = 2.0$ ,  $t = 3.0$ ,  $t = 4.0$ ,  $t = 5.0$  における  $\rho$  の値をプロットしたものである .

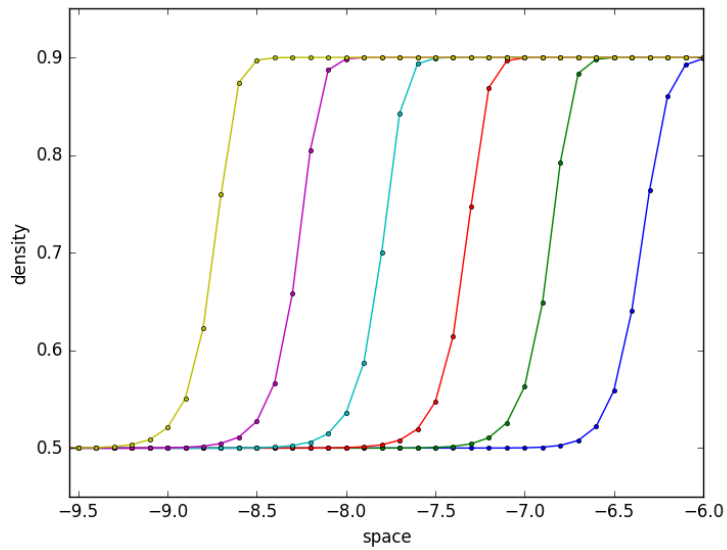


図 6 離散モデル (13) の時間発展 ( $\delta = 0.3$ ) . 右からそれぞれ  $t = 0.0$ ,  $t = 1.0$ ,  $t = 2.0$ ,  $t = 3.0$ ,  $t = 4.0$ ,  $t = 5.0$  における  $\rho$  の値をプロットしたものである .



## 5 まとめと今後の課題

本論文では、車の台数保存則と車群の前方認識性に関する仮定を用いて構成した交通流を記述する新しい離散モデルを提案した。この離散モデルは、連続近似を行うとある条件のもとで Burgers 方程式に移行することも示した。さらに、車群の前方認識性に関する拡張を行い、見通し効果を持った離散モデルも提案した。前者のモデルの数値実験から、初期値からある滑らかな進行波に変化していく様子が観察された。この進行波解は、モデルが持っている定常解であると考えられる。一方、この定常解を初期値とした後者のモデルの数値実験では、パラメータ  $\delta$  が小さい場合は、初期値から形があまり変化しない進行波が観察されたが、パラメータ  $\delta$  が大きくなるにつれて、進行波の波面の勾配も大きくなることがわかった。

この現象は交通流における過飽和と関連していると筆者らは考える。今後離散モデル (13) に対する数値計算によって、より詳細な情報を抽出するとともに、[2] で提案された厳密に解ける非局所方程式の解も援用して、見通し効果の影響を検討し、交通流における渋滞現象の理解に役立つ成果を挙げていきたい。

## 謝辞

本研究は JSPS 科研費基盤研究 (C)(No.16K05048) および (No.17K05147) の助成を受けたものである。

## 参考文献

- [1] T. Musha and H. Higuchi, J. J. App. Phys., **17**, (1978), 811–816.
- [2] 薩摩 順吉, 友枝 明保, 武蔵野大学数理工学センター紀要, 第 3 号, (2018), 7.
- [3] J. Satsuma, J. Phys. Soc. Japan 50 (1981), 1432.

(原稿提出: 2019 年 1 月 29 日; 修正稿提出: 2019 年 2 月 7 日)