Ultra-discretizable discretization of a reaction diffusion system modeling predator-pray and stabilities of its equilibrium solutions

競争拡散系の超離散化可能な離散化で得られた偏差分方程式系の平衡解の安定性

Ultra-discretizable discretization of a reaction diffusion system modeling predator-pray and stabilities of its equilibrium solutions

松 家 敬 介[1]

Keisuke Matsuya

概要

本稿では, これまでの研究で与えていた離散化の手法を用いた競争拡散系の離散化を与え, そこで得られた偏差分方程式系の特定の領域における平衡解の安定性について議論した. その結果, 平衡解の安定性はもとの競争拡散系の平衡解の安定性ときれいに一致するということがわかった. 離散化を行うと, 一般的には解の構造の一部が崩れてしまうが, 平衡解の安定性に関して定性的には変化しておらず, 今回扱った偏差分方程式系は離散化としてはよいものであると言える.

1 はじめに

著者は, これまでの研究で反応拡散系を離散化して得られる偏差分方程式とその平衡解の安定性について調べていた [1]. 偏差分方程式の平衡解とその安定性は離散化する前の反応拡散系の平衡解とその安定性と対応したものとなっていた. ここで, 以下の反応拡散系:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = D_u \Delta u + f_1(u,v) - g_1(u,v) \\ \dfrac{\partial v}{\partial t} = D_v \Delta v + f_2(u,v) - g_2(u,v) \end{cases} \tag{1}$$

を考える. ただし, $u = u(t,x),\ v = v(t,x),\ t \geq 0,\ x \in \mathbb{R}^d,\ D_u,\ D_v > 0,\ \Delta$ は d 次元ラプラシアンとする. (1) の離散化として次の偏差分方程式系:

$$\begin{cases} u_{n+1}^j = \dfrac{m_p\left(u_n^j\right) + \delta f_1\left(m_p\left(u_n^j\right), m_q\left(v_n^j\right)\right)}{m_p\left(u_n^j\right) + \delta g_1\left(m_p\left(u_n^j\right), m_q\left(v_n^j\right)\right)} m_p\left(u_n^j\right) \\ v_{n+1}^j = \dfrac{m_q\left(v_n^j\right) + \delta f_2\left(u_{n+1}^j, m_p\left(v_n^j\right)\right)}{m_q\left(v_n^j\right) + \delta g_2\left(u_{n+1}^j, m_q\left(v_n^j\right)\right)} m_q\left(v_n^j\right) \end{cases} \tag{2}$$

---

[1] 武蔵野大学数理工学センター員 / 武蔵野大学工学部数理工学科准教授

が挙げられる. ただし, $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0},\ j \in \mathbb{Z}^d,\ p,\ q \in \mathbb{Z}_{>0},\ \delta > 0, e_\ell \in \mathbb{Z}^d$ を第 ℓ 成分が 1 の単位ベクトルとし,

$$m_p\left(u_n^j\right) := \sum_{\ell=1}^{d} \frac{u_n^{j+pe_\ell} + u_n^{j-pe_\ell}}{2}, \qquad m_q\left(v_n^j\right) := \sum_{\ell=1}^{d} \frac{v_n^{j+qe_\ell} + v_n^{j-qe_\ell}}{2}$$

とする. (2) は [1] で扱った反応拡散系の離散化と類似したものである. (2) が (1) の離散化になっていることは次のようにして確かめられる. (2) の右辺を $\delta = 0$ のまわりで展開すると,

$$\begin{aligned} u_{n+1}^j &= m_p\left(u_n^j\right) + \delta\left\{f_1\left(m_p\left(u_n^j\right), m_q\left(vs_n\right)\right) - g_1\left(m_p\left(u_n^j\right), m_q\left(v_n^j\right)\right)\right\} + O\left(\delta^2\right) \\ v_{n+1}^j &= m_q\left(v_n^j\right) + \delta\left\{f_2\left(u_{n+1}^j, m_q\left(v_n^j\right)\right) - g_2\left(u_{n+1}^j, m_q\left(v_n^j\right)\right)\right\} + O\left(\delta^2\right) \end{aligned}$$

と変形でき, ここで, p が

$$\xi = \sqrt{2dD_u\delta}/p$$

を満たすとすると,

$$\begin{aligned} \frac{m_p\left(u_n^j\right) - u_n^j}{\delta} &= D_u \sum_{k=1}^{d} \frac{u_n^{j+pe_k} - 2u_n^j + u_n^{j-pe_k}}{(p\xi)^2} \\ \frac{m_q\left(v_n^j\right) - v_n^j}{\delta} &= \frac{q^2}{p^2} D_u \sum_{k=1}^{d} \frac{v_n^{j+qe_k} - 2v_n^j + v_n^{j-qe_k}}{(q\xi)^2} \end{aligned}$$

となることから, (2) が (1) の $D_v/D_u = (q/p)^2$ の場合の離散化となっていることが分かる.

著者は [1] において反応項が減算を含まない有理式同士の差であるような反応拡散系の離散化を与え, 平衡解の安定性について調べていた. このような離散化を考える利点として, 離散化で得られた偏差分方程式系にも減算が含まれないために超離散化 [3] できることが挙げられる. 超離散化して新たな偏差分方程式系が構成され, この方程式系の解がセルオートマトンとなることがあり, 解の挙動を容易にとらえられるようになる. これまでの研究で著者は反応拡散系の一つである Gray-Scott モデルの離散化および超離散化とその解についての解析を行っていた [2]. 可積分方程式に対しては, 微分方程式, 離散化して得られた差分方程式そして超離散化して得られた方程式それぞれについて盛んに研究が行われている [4]. 一方で非可積分な方程式に対してはこういった研究の具体例が現状では多くはない.

先行研究によって競争拡散系:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = D_u \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + ru(k - u - \alpha v) \\ \dfrac{\partial v}{\partial t} = D_v \dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} + sv(l - v - \beta u) \end{cases} \tag{3}$$

を変数変換した方程式を超離散化した方程式の解の解析がなされている [5]. ただし, 空間の次元 d は $d = 1$ としており, $r,\ s,\ k,\ l > 0$ とする. 本稿では, 非可積分方程式の一つでもある競争拡散系を超離散化してえられた方程式系の解と離散化して得られた差分方程式系の解を比較する準備として, 離散化して得られた差分方程式系の解析を行う. 特に, 離散化して得られた差

分方程式系の平衡解の安定性ともとの反応拡散系の平衡解の安定性とも比較する．本稿の結果は [1] の具体例でもあり, 離散化して得られた差分方程式系の平衡解の安定性はもとの反応拡散系の平衡解の安定性と一般的にはずれてしまうが今回扱った競争拡散系を離散化して得られた差分方程式系の非負値の平衡解の安定性ともとの反応拡散系の非負値の平衡解の安定性と一致することがわかった.

本稿の第 2 節では競争拡散系の変数変換とその平衡解とその安定性に関する性質を紹介し, 第 3 節では競争拡散系の超離散化可能な離散化である差分方程式系とその平衡解の安定性を調べる．第 4 節では得られた結果をまとめ, 今後の展望について述べる.

2　競争拡散系とその平衡解の安定性

本節では (3) に変数変換を行い, その平衡解と安定性についてまとめる．超離散化した後の解析を簡便にするために [2] で行った変数変換と同様の変数変換:

$$\bar{u} = u + 1,\ \bar{v} = v + 1$$

を (3) に施すと,

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \bar{u}}{\partial t} = D_u \dfrac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2} + r\,(\bar{u} - 1)\,(\alpha + k + 1 - \bar{u} - \alpha\bar{v}) \\ \dfrac{\partial \bar{v}}{\partial t} = D_v \dfrac{\partial^2 \bar{v}}{\partial x^2} + s\,(\bar{v} - 1)\,(\beta + l + 1 - \bar{v} - \beta\bar{u}) \end{cases}$$

が得られる．(3) の非負値解を考えることは $\bar{u} \geq 1,\ \bar{v} \geq 1$ を満たす解を考えることに対応することに注意する．ここで, $\bar{u},\ \bar{v}$ をそれぞれ改めて $u,\ v$ と書くことにし, $k+1,\ l+1$ をそれぞれ改めて $k,\ l$ と書くことにする．したがって, 次の反応拡散系:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = D_u \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + r\,(u - 1)\,(\alpha + k - u - \alpha v) \\ \dfrac{\partial v}{\partial t} = D_v \dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} + s\,(v - 1)\,(\beta + l - v - \beta u) \end{cases} \tag{4}$$

を考える．ただし, $D_u,\ D_v,\ r,\ s,\ \alpha,\ \beta > 0,\ k,\ l > 1$ とし, $u = u(t,x) \geq 1,\ v = v(t,x) \geq 1$ を満たす解のみを考える.

(4) に対応する常微分方程式系, すなわち, 空間一様解 $u = u(t),\ v = v(t)$ が満たす方程式系は

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} = r\,(u - 1)\,(\alpha + k - u - \alpha v) \\ \dfrac{dv}{dt} = s\,(v - 1)\,(\beta + l - v - \beta u) \end{cases} \tag{5}$$

で与えられる．この方程式系の平衡解 (u^*, v^*) は $u^*,\ v^*$ の連立方程式:

$$\begin{cases} r\,(u^* - 1)\,(\alpha + k - u^* - \alpha v^*) = 0 \\ s\,(v^* - 1)\,(\beta + l - v^* - \beta u^*) = 0 \end{cases}$$

を解くことで,

$$(1,1),\ (1,l),\ (k,1),\ \left(\frac{\alpha+k-\alpha(\beta+l)}{1-\alpha\beta}, \frac{(\beta+l)-\beta(\alpha+k)}{1-\alpha\beta}\right) (=: (u_{\mathrm{C}}, v_{\mathrm{C}}))$$

であることがわかる.

注意 1　$(u_{\mathrm{C}}, v_{\mathrm{C}})$ の平衡点は,

$$\frac{\alpha+k-\alpha(\beta+l)}{1-\alpha\beta},\ \frac{(\beta+l)-\beta(\alpha+k)}{1-\alpha\beta} \geq 1$$

を満たすときにのみ, 今回考えている設定と合致するものであることに注意する.

これらの平衡解の安定性は平衡解のまわりで (5) を線形化した方程式系:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\begin{pmatrix}\tilde{u}\\ \tilde{v}\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} r\left\{(\alpha+k-u^*-\alpha v^*)-(u^*-1)\right\} & -r\alpha\left(u^*-1\right) \\ -s\beta\left(v^*-1\right) & s\left\{(\beta+l-v^*-\beta u^*)-(v^*-1)\right\}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\tilde{u}\\ \tilde{v}\end{pmatrix} \\ &=: A\begin{pmatrix}\tilde{u}\\ \tilde{v}\end{pmatrix}\end{aligned}$$

の係数を取り出した行列 $A = (A_{\ell m})_{\ell, m=1,2}$ の固有値の実部の正負を調べることでわかる. より具体的には,

$$\mathrm{tr}A > 0,\ \det A > 0$$

であれば固有値の実部がすべて負, すなわち, 平衡解は線形安定となり,

$$(\mathrm{tr}A) < 0 \text{ または } (\det A) < 0$$

であれば固有値の実部が正のものが少なくとも 1 つある, すなわち, 平衡解は不安定となる. 実際に 4 つの平衡解に対して調べると, 以下の通りとなる.

- $(1,1)$: 不安定
- $(1,l)$:
  $\alpha+k-1-\alpha l < 0$ のとき線形安定
  $\alpha+k-1-\alpha l > 0$ のとき不安定
- $(k,1)$:
  $\beta+l-1-\beta k < 0$ のとき線形安定
  $\beta+l-1-\beta k > 0$ のとき不安定
- $(u_{\mathrm{C}}, v_{\mathrm{C}})$:
  $\beta < \dfrac{l-1}{k-1} < \dfrac{1}{\alpha}$ のとき線形安定
  $\dfrac{1}{\alpha} < \dfrac{l-1}{k-1} < \beta$ のとき不安定

もとの反応拡散系 (4) に戻ってみると, 平衡解 (u^*, v^*) が線形安定であったとしても拡散項の影響で不安定化することがあり, この現象は Turing 不安定化と呼ばれる. 以下の手続きを行

えば Turing 不安定化の有無がわかる．平衡解 (u^*, v^*) のまわりで (4) を線形化した方程式系に対して,

$$(\tilde{u}, \tilde{v}) = (c_1 \exp(\omega_\kappa t + i\kappa x), c_2 \exp(\omega_\kappa t + i\kappa x))$$

という形の解を考えると,

$$\omega_\kappa \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} - D_u\kappa^2 & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} - D_v\kappa^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} =: \hat{A} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

が得られる．ω_κ は $\hat{A}$ の固有値であり, κ に対応する空間的振動を表し, ω_κ の実部の符号を調べることで Turing 不安定化の有無がわかる．(5) の平衡解であって線形安定であり得るものは, $(1, l)$, $(k, 1)$, $(u_{\mathrm{C}}, v_{\mathrm{C}})$ であった．これらの平衡解に対して対応する $\hat{A}$ の固有値 ω_κ の実部の符号を調べるとどの平衡解に対しても Turing 不安定化が起こらないことがわかる．

3　競争拡散系の離散化とその平衡解の安定性

本節では (4) の離散化を与え, その平衡解の安定性について議論する．(1) から (2) を構成したように (4) を離散化すると

$$\begin{cases} u_{n+1}^j = \dfrac{m_p\left(u_n^j\right) + \delta r\left\{(1+\alpha+k)m_p\left(u_n^j\right) + \alpha m_q\left(v_n^j\right)\right\}}{m_p\left(u_n^j\right) + \delta r\left[\left\{m_p\left(u_n^j\right)\right\}^2 + \alpha m_p\left(u_n^j\right) m_q\left(v_n^j\right) + \alpha + k\right]} m_p\left(u_n^j\right) \\ v_{n+1}^j = \dfrac{m_q\left(v_n^j\right) + \delta s\left\{(1+\beta+l)m_q\left(v_n^j\right) + \beta u_{n+1}^j\right\}}{m_q\left(v_n^j\right) + \delta r\left[\left\{m_q\left(v_n^j\right)\right\}^2 + \beta u_{n+1}^j m_q\left(v_n^j\right) + \beta + l\right]} m_q\left(v_n^j\right) \end{cases} \tag{6}$$

となる．ただし, (4) と同じように $u_n^j,\ v_n^j \geq 1\ \left({}^\forall n,\ j\right)$ となる解に注目することにする．

(6) に対応する常差分方程式系, すなわち,　空間一様解 $u_n^j = u_n,\ v_n^j = v_n$ が満たす方程式系は

$$\begin{cases} u_{n+1} = \dfrac{u_n + \delta r\left\{(1+\alpha+k)u_n + \alpha v_n\right\}}{u_n + \delta r\left\{(u_n)^2 + \alpha u_n v_n + \alpha + k\right\}} u_n \\ v_{n+1} = \dfrac{v_n + \delta s\left\{(1+\beta+l)v_n + \beta u_{n+1}\right\}}{v_n + \delta r\left\{(v_n)^2 + \beta u_{n+1} v_n + \beta + l\right\}} v_n \end{cases} \tag{7}$$

で与えられる．この方程式系の平衡解 (u^*, v^*) は $u^*,\ v^*$ の連立方程式:

$$\begin{cases} \dfrac{u^* + \delta r\left\{(1+\alpha+k)u^* + \alpha v^*\right\}}{u^* + \delta r\left\{(u^*)^2 + \alpha u^* v^* + \alpha + k\right\}} u^* = u^* \\ \dfrac{v^* + \delta s\left\{(1+\beta+l)v^* + \beta u^*\right\}}{v^* + \delta r\left\{(v^*)^2 + \beta u^* v^* + \beta + l\right\}} v^* = v^* \end{cases}$$

を解くことで,

$$(1,1),\ (1,l),\ (k,1),\ \left(\frac{\alpha+k-\alpha(\beta+l)}{1-\alpha\beta}, \frac{(\beta+l)-\beta(\alpha+k)}{1-\alpha\beta}\right) (= (u_{\mathrm{C}}, v_{\mathrm{C}}))$$

があることがわかり, (5) の場合と対応していることも確認できる.

注意 2　(5) の場合と異なる点もあり, 平衡解としてここに挙げたものの他に

$$(0,0),\ (0,1),\ (0,\beta+l),\ (1,0),\ (\alpha+k,0)$$

もある. (4) では $u,v \geq 1$ を満たすものを考えていたので, 今回はこれらの平衡解については考えないことにする. また, (6) の初期条件に対して $u_0^j, v_0^j \geq 1 \ \left({}^\forall j\right)$ を仮定すると $u_n^j, v_n^j \geq 1 \ \left({}^\forall n,\ j\right)$ が成り立つことからもこのことは正当化できる.

平衡解のまわりで (7) を線形化した方程式系は,

$$\begin{cases} \tilde{u}_{n+1} = \left(1 + \dfrac{\delta r\left\{(\alpha+k+1) - (2u^* + \alpha v^*)\right\} u^*}{u^* + \delta r\left\{\left(u^*\right)^2 + \alpha u^* v^* + \alpha + k\right\}}\right) \tilde{u}_n \\ \qquad\qquad - \dfrac{\alpha\delta r\left(u^*-1\right) u^*}{u^* + \delta r\left\{\left(u^*\right)^2 + \alpha u^* v^* + \alpha + k\right\}} \tilde{v}_n \\ \tilde{v}_{n+1} = -\dfrac{\beta\delta s\left(v^*-1\right) v^*}{v^* + \delta s\left\{\left(v^*\right)^2 + \beta u^* v^* + \beta + l\right\}} \tilde{u}_{n+1} \\ \qquad\qquad + \left(1 + \dfrac{\delta s\left\{(\beta+l+1) - (2v^* + \beta u^*)\right\} v^*}{v^* + \delta s\left\{\left(v^*\right)^2 + \beta u^* v^* + \beta + l\right\}}\right) \tilde{v}_n \end{cases}$$

の右辺の係数行列を $\left(\tilde{B}_{\ell m}\right)_{\ell,m=1,2}$ とすると,

$$\begin{pmatrix} \tilde{u}^{s+1} \\ \tilde{v}^{s+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{B}_{11} & \tilde{B}_{12} \\ \tilde{B}_{11}\tilde{B}_{21} & \tilde{B}_{12}\tilde{B}_{21} + \tilde{B}_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{u}^{s} \\ \tilde{v}^{s} \end{pmatrix} =: B \begin{pmatrix} \tilde{u}^{s} \\ \tilde{v}^{s} \end{pmatrix}$$

であり, 行列 $B = \left(B_{\ell m}\right)_{\ell,m=1,2}$ の固有値の絶対値と 1 の大小を比較することで平衡解の安定性がわかる. より具体的には,

$$\det B < 1,\ 1 \pm \operatorname{tr} B + \det B > 0$$

であれば固有値の絶対値がすべて 1 より小さく, すなわち, 平衡解は線形安定となり,

$$\det B < 1 \text{ または } 1 + \mathrm{tr} B + \det B > 0 \text{ または } 1 - \mathrm{tr} B + \det B > 0$$

であれば固有値の絶対値が 1 より大きいものが少なくとも 1 つある, すなわち, 平衡解は不安定となる.

注意 3　$\det B = \tilde{B}_{11}\tilde{B}_{22}$ となっていることに注意する.

実際に 4 つの平衡点に対して調べてみる.

- $(1, 1)$:
このとき,

$$B = \begin{pmatrix} 1 + \dfrac{\delta r(k-1)}{1+\delta r(2\alpha+k+1)} & 0 \\ 0 & 1 + \dfrac{\delta s(l-1)}{1+\delta s(2\beta+l+1)} \end{pmatrix}$$

であり, 固有値は対角成分となる. $k,\ l > 1,\ \delta, r, s, \alpha, \beta > 0$ よりこれらの固有値はどちらも 1 より大きいことがわかり, $(1, 1)$ は不安定である.

- $(1, l)$:
このとき,

$$B = \begin{pmatrix} 1 + \dfrac{\delta r(\alpha+k-1-\alpha l)}{1+\delta r\{(l+1)\alpha+k+1\}} & 0 \\ * & 1 - \dfrac{\delta s(l-1)l}{l+\delta s(\beta+l)(l+1)} \end{pmatrix}$$

であり, 固有値は対角成分となる. $(2, 2)$ 成分は, $l > 1$ とその他のパラメータの非負値性より, 0 と 1 の間にある. $(1, 1)$ 成分は, パラメータの非負値性より,

$$\alpha + k - 1 - \alpha l < 0$$

を満たせば, 0 と 1 の間にあり,

$$\alpha + k - 1 - \alpha l > 0$$

を満たせば, 1 以上となることがわかる. 以上から,
$\alpha + k - 1 - \alpha l < 0$ のとき線形安定
$\alpha + k - 1 - \alpha l > 0$ のとき不安定
である.

- $(k, 1)$:
このとき,

$$B = \begin{pmatrix} 1 - \dfrac{\delta r(k-1)k}{k+\delta r(\alpha+k)(k+1)} & -\dfrac{\alpha\delta r(k-1)k}{k+\delta r(\alpha+k)(k+1)} \\ 0 & 1 + \dfrac{\delta s(\beta+l-1-\beta k)}{1+\delta s\{(k+1)\beta+l+1\}} \end{pmatrix}$$

であり, 固有値は対角成分となる. $(1, 1)$ 成分は, $k > 1$ とその他のパラメータの非負値性より, 0 と 1 の間にある. $(2, 2)$ 成分は, パラメータの非負値性より,

$$\beta + l - 1 - \beta k < 0$$

を満たせば, 0 と 1 の間にあり,

$$\beta + l - 1 - \beta k > 0$$

を満たせば, 1 以上となることがわかる. 以上から,
$\beta + l - 1 - \beta k < 0$ のとき線形安定
$\beta + l - 1 - \beta k > 0$ のとき不安定
である.

- $(u_{\mathrm{C}}, v_{\mathrm{C}})$:
このとき,

$$\tilde{B} = \begin{pmatrix} 1 - \dfrac{\delta r\left(u_{\mathrm{C}}-1\right)u_{\mathrm{C}}}{u_{\mathrm{C}}+\delta r\left(u_{\mathrm{C}}+\alpha v_{\mathrm{C}}\right)\left(u_{\mathrm{C}}+1\right)} & -\dfrac{\alpha\delta r\left(u_{\mathrm{C}}-1\right)u_{\mathrm{C}}}{u_{\mathrm{C}}+\delta r\left(u_{\mathrm{C}}+\alpha v_{\mathrm{C}}\right)\left(u_{\mathrm{C}}+1\right)} \\ -\dfrac{\beta\delta s\left(v_{\mathrm{C}}-1\right)v_{\mathrm{C}}}{v_{\mathrm{C}}+\delta s\left(v_{\mathrm{C}}+\beta u_{\mathrm{C}}\right)\left(v_{\mathrm{C}}+1\right)} & 1 - \dfrac{\delta s\left(v_{\mathrm{C}}-1\right)v_{\mathrm{C}}}{v_{\mathrm{C}}+\delta s\left(v_{\mathrm{C}}+\beta u_{\mathrm{C}}\right)\left(v_{\mathrm{C}}+1\right)} \end{pmatrix}$$

であり, $u_{\mathrm{C}},\ v_{\mathrm{C}} > 1$ およびパラメータの非負値性より, $\tilde{B}_{11}$ および $\tilde{B}_{22}$ はどちらも 0 と 1 の間にあり,

$$1 - \det B = 1 - \tilde{B}_{11}\tilde{B}_{22} > 0$$

が従う. また, $\tilde{B}_{12}\tilde{B}_{21}$ も正なので, $\operatorname{tr} B > 0$ であり,

$$1 + \operatorname{tr} B + \det B > 0$$

が従う. さらに,

$$\begin{aligned} 1 - \mathrm{tr} B + \det B &= \left(1 - \tilde{B}_{11}\right)\left(1 - \tilde{B}_{22}\right) - \tilde{B}_{12}\tilde{B}_{21} \\ &= \frac{\delta^2 rs\left(u_{\mathrm{C}}-1\right)\left(v_{\mathrm{C}}-1\right)u_{\mathrm{C}}v_{\mathrm{C}}(1-\alpha\beta)}{\left\{u_{\mathrm{C}}+\delta r\left(u_{\mathrm{C}}+\alpha v_{\mathrm{C}}\right)\left(u_{\mathrm{C}}+1\right)\right\}\left\{v_{\mathrm{C}}+\delta s\left(v_{\mathrm{C}}+\beta u_{\mathrm{C}}\right)\left(v_{\mathrm{C}}+1\right)\right\}} \end{aligned}$$

であるから, $u_{\mathrm{C}},\ v_{\mathrm{C}} > 1$ およびパラメータの非負値性より, $1 - \alpha\beta$ の符号で安定性がわかる. 実際に,

$$u_{\mathrm{C}},\ v_{\mathrm{C}} > 1,\ 1 - \alpha\beta > 0$$

すなわち,

$$\beta < \frac{l-1}{k-1} < \frac{1}{\alpha}$$

ならば線形安定であり,

$$u_{\mathrm{C}},\ v_{\mathrm{C}} > 1,\ 1 - \alpha\beta < 0$$

すなわち,

$$\frac{1}{\alpha} < \frac{l-1}{k-1} < \beta$$

ならば不安定である.

以上から, もとの微分方程式系 (5) の平衡解とその安定性と一致していることがわかった.

(6) に戻って,　微分方程式系の場合と同じように, 線形安定な平衡解 (u^*, v^*) が拡散の効果の影響で不安定化するかを確認する. 平衡解 (u^*, v^*) のまわりで (6) を線形化した方程式系に対して,

$$\left(\tilde{u}_n^j, \tilde{v}_n^j\right) = \left(c_1\left(\lambda_\kappa\right)^n \exp\left(i\kappa j\right), c_2\left(\lambda_\kappa\right)^n \exp\left(i\kappa j\right)\right)$$

という形の解を考えると

$$\lambda_\kappa \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_{11}\cos(\kappa p) & B_{12}\cos(\kappa q) \\ B_{21}\cos(\kappa p) & B_{22}\cos(\kappa q) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} =: \hat{B} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

が得られる．λ_κ は $\hat{B}$ の固有値であり，その絶対値が 1 より大きいものがあれば，平衡解 (u^*, v^*) が (7) において線形安定であっても不安定化することを意味している．(7) の平衡解であって線形安定であり得るものは，$(1, l)$，$(k, 1)$，$(u_{\mathrm{C}}, v_{\mathrm{C}})$ であった．これらの平衡解に対して対応する $\hat{B}$ の固有値 λ_κ の絶対値をそれぞれ調べて見せる．

- $(1, l)$
  このとき，$(1, l)$ は線形安定であるから $\alpha + k - 1 - \alpha l < 0$ であり，

$$\hat{B} = \begin{pmatrix} \left[1 + \dfrac{\delta r(\alpha + k - 1 - \alpha l)}{1 + \delta r\{(l+1)\alpha + k + 1\}}\right]\cos(\kappa p) & 0 \\ * & \left[1 - \dfrac{\delta s(l-1)l}{l + \delta s(\beta + l)(l+1)}\right]\cos(\kappa q) \end{pmatrix}$$

  であるから，固有値は対角成分であり，$|\cos(\kappa p)|$，$|\cos(\kappa q)| < 1$ であるからやはり固有値の絶対値は 1 より小さいままである．したがって，この平衡解は Turing 不安定化しないことがわかる．

- $(k, 1)$
  このとき，$(k, 1)$ は線形安定であるから $\alpha + k - 1 - \alpha l < 0$ であり，

$$\hat{B} = \begin{pmatrix} \left[1 - \dfrac{\delta r(k-1)k}{k + \delta r(\alpha + k)(k+1)}\right]\cos(\kappa p) & -\dfrac{\alpha\delta r(k-1)k}{k + \delta r(\alpha + k)(k+1)}\cos(\kappa q) \\ 0 & \left[1 + \dfrac{\delta s(\beta + l - 1 - \beta k)}{1 + \delta s\{(k+1)\beta + l + 1\}}\right]\cos(\kappa q) \end{pmatrix}$$

  であるから，固有値は対角成分であり，$|\cos(\kappa p)|$，$|\cos(\kappa q)| < 1$ であるからやはり固有値の絶対値は 1 より小さいままである．したがって，この平衡解は Turing 不安定化しないことがわかる．

- $(u_{\mathrm{C}}, v_{\mathrm{C}})$
  このとき，$(u_{\mathrm{C}}, v_{\mathrm{C}})$ は線形安定であり，$|\cos(\kappa p)|$，$|\cos(\kappa q)| < 1$ であるから，

$$1 - \det \hat{B} = 1 - \det B \cos(\kappa p)\cos(\kappa q) > 0$$

である. また, $\tilde{B}_{11}$ および $\tilde{B}_{22}$ はどちらも 0 と 1 の間にあり, $\tilde{B}_{12}\tilde{B}_{21} > 0$ より,

$$\begin{aligned}1 + \operatorname{tr}\hat{B} + \det\hat{B} &= \left\{1 + \tilde{B}_{11}\cos(\kappa p)\right\}\left\{1 + \tilde{B}_{22}\cos(\kappa q)\right\} + \tilde{B}_{12}\tilde{B}_{21}\cos(\kappa q) \\ &> \left(1 - \tilde{B}_{11}\right)\left\{1 + \tilde{B}_{22}\cos(\kappa q)\right\} + \tilde{B}_{12}\tilde{B}_{21}\cos(\kappa q) \\ &= 1 - \tilde{B}_{11} + \left\{\left(1 - \tilde{B}_{11}\right)\tilde{B}_{22} + \tilde{B}_{12}\tilde{B}_{21}\right\}\cos(\kappa q) \\ &> 1 - \tilde{B}_{11} - \left\{\left(1 - \tilde{B}_{11}\right)\tilde{B}_{22} + \tilde{B}_{12}\tilde{B}_{21}\right\} \\ &= 1 - \mathrm{tr}B + \det B > 0\end{aligned}$$

であり,

$$\begin{aligned}1 - \operatorname{tr}\hat{B} + \det\hat{B} &= \left\{1 - \tilde{B}_{11}\cos(\kappa p)\right\}\left\{1 - \tilde{B}_{22}\cos(\kappa q)\right\} - \tilde{B}_{12}\tilde{B}_{21}\cos(\kappa q) \\ &> \left(1 - \tilde{B}_{11}\right)\left\{1 - \tilde{B}_{22}\cos(\kappa q)\right\} - \tilde{B}_{12}\tilde{B}_{21}\cos(\kappa q) \\ &= 1 - \tilde{B}_{11} - \left\{\left(1 - \tilde{B}_{11}\right)\tilde{B}_{22} + \tilde{B}_{12}\tilde{B}_{21}\right\}\cos(\kappa q) \\ &> 1 - \tilde{B}_{11} - \left\{\left(1 - \tilde{B}_{11}\right)\tilde{B}_{22} + \tilde{B}_{12}\tilde{B}_{21}\right\} \\ &= 1 - \mathrm{tr}B + \det B > 0\end{aligned}$$

となるので, やはりこの平衡解も Turing 不安定化しないことがわかる.

以上から, 拡散の効果が入ってもやはり (4) と同じく Turing 不安定化が起こらないことがわかった.

4　まとめ

本稿では, [1] で提示された離散化の手法を用いた競争拡散系の離散化を与え, そこで得られた偏差分方程式系の特定の領域における平衡解の安定性について議論した. その結果, 平衡解の安定性はもとの競争拡散系の平衡解の安定性ときれいに一致するということがわかった. 離散化を行うと, 一般的には解の構造の一部が崩れてしまうが, 平衡解の安定性に関して定性的には変化しておらず, 今回扱った偏差分方程式系は離散化としてはよいものであると言える.

今後は [5] の結果と比較しながら離散化して得られた方程式系の解と超離散化して得られた方程式系の解の比較も行い, 連続系, 離散系そして超離散系の関係について明らかにしていきたい.

参考文献

[1] 松家 敬介, 反応拡散系の減算のない離散化と平衡解の安定性について, 武蔵野大学数理工学センター紀要, **4** (2019), 50–58.

[2] K. Matsuya and M. Murata, Spatial pattern of discrete and ultradiscrete Gray-Scott model, *Discrete Continuous Dyn. Syst. Ser. B*, **20** (2015), 173–187.

[3] T. Tokihiro, D. Takahashi, J. Matsukidaira, and J. Satsuma, From soliton equations to integrable cellular automata through a limiting procedure *Phys. Rev. Lett.* **76** (1996), 3247–3250.

[4] 時弘 哲治, 『箱玉系の数理』 朝倉書店, (2010)

[5] 村田 実貴生, 日本応用数理学会 *2021* 年度 年会予稿集, 304–305.

(原稿提出: 2021 年 11 月 19 日; 修正稿提出: 2021 年 11 月 30 日)