

Global bifurcation structure of solutions of a nonlocal Allen–Cahn equation

メタデータ	言語: jpn 出版者: 公開日: 2020-07-23 キーワード (Ja): キーワード (En): 作成者: 森, 竜樹 メールアドレス: 所属:
URL	https://mu.repo.nii.ac.jp/records/1298

非局所 Allen-Cahn 方程式の解の大域的分岐構造

Global bifurcation structure of solutions of a nonlocal Allen–Cahn equation

森 竜 樹¹

Tatsuki Mori

1 背景

本研究は久藤 衡介教授（早稲田大学）、宮本安人准教授（東京大学）、辻川 亨教授（宮崎大学）、四ツ谷 晶二名誉教授（龍谷大学科学技術共同研究センター）との共同研究に基づくものである。また、本稿の内容は [11] で得られた知見を新しく解釈しなおし、結果を整理するものである。

次の 1 次元定常非局所 Allen-Cahn 方程式のノイマン問題

$$\begin{cases} -du_{xx} = (1 - u^2) \left(u - \frac{\mu}{2} \int_{-1}^1 u \, dx \right), & x \in I := (-1, 1), \\ u_x(\pm 1) = 0, \\ u_x(x) \geq 0, & x \in I \end{cases} \quad (1.1)$$

に興味を持っている。ただし、 $u = u(x)$ は未知関数、 $d > 0$ はパラメータであり、 μ は非局所項の大きさを表す非負定数である。また、(1.1) は定数解 $u = 0$, $u = \pm 1$ を持ち、 $u(x)$ を解としたとき、 $-u(-x)$ も解である。単調増加解の反転やリスケールでその他の解を構成できるので、解の単調増加性を仮定している。

この種の非局所項を含む Allen-Cahn 型の非線形項を持つ反応拡散方程式の定常問題はエネルギーや質量が保存されている現象をモデル化した際にたびたび現れるため、これまで多くの研究者に興味を持たれてきた ([2], [3], [4], [5], [6], [7], [8], [12], [13], [14], [16], [17])。

中でも特に関連が強い問題は、質量保存付き細胞極性モデルにおいてあるタンパク質の拡散係数を無限大とした極限方程式の定常問題 [12] と、白金の吸着質誘導相転移モデルの拡散係数を無限大とした極限方程式の定常問題 [6] である。この 2 つの問題は非局所で双安定な非線形項を持ち、非線形性の高さから拡散係数を止める毎の解の個数や解の安定性の解析が困難となっている。

そこで、本研究では上記 2 つのモデルに共通する非局所項を含む双安定な非線形項を持つという性質を保ったまま、非局所項を最も基礎的な方程式の解の区間積分に取り換えた設定ならば、解の大域的分岐構造を完全解明できるのではないかと、という観点で (1.1) を提案し、解析

¹ 武蔵野大学数理工学センター員 / 武蔵野大学工学部数理工学科助教

を開始した.

(1.1) は λ, d をパラメータに持つ補助的な境界値問題

$$\begin{cases} -du_{xx} = (1 - u^2)(u - \lambda), & x \in I, \\ u_x(\pm 1) = 0, \\ u_x(x) \geq 0, & x \in I \end{cases} \quad (1.2)$$

と積分制約条件

$$\lambda = \frac{\mu}{2} \int_{-1}^1 u \, dx \quad (1.3)$$

が付随した同値な問題に書き換えることができる.

(1.2), (1.3) の非定数解の集合を

$$\mathcal{S}(\mu) := \{(\lambda, d, u) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \times C_\nu^2(\bar{I}) : u \text{ は (1.2), (1.3) の非定数解}\} \quad (1.4)$$

と定義する. ここで, $C_\nu^2(\bar{I}) := \{u \in C^2(\bar{I}) : u_x(\pm 1) = 0\}$ である. 図 1 は数値計算による $\mathcal{S}(\mu)$ の概形である.

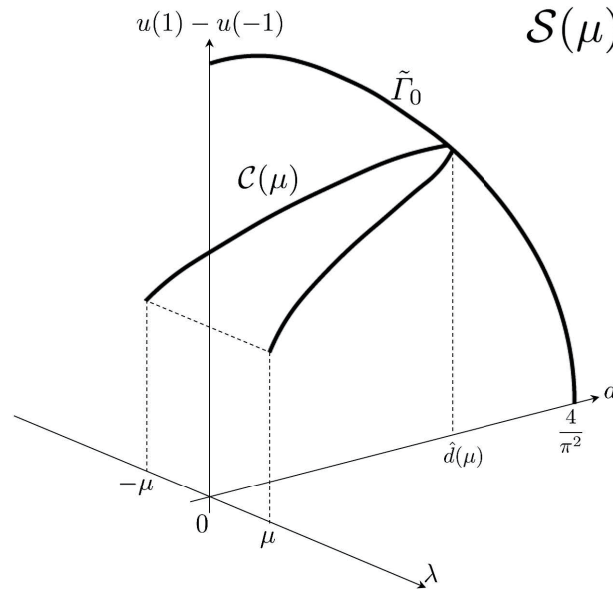


図 1 $\mathcal{S}(\mu)$ の概形

(1.3) において, 積分制約条件がなくなる $\mu = 0$, すなわち $\lambda = 0$ の場合は Chafee-Infante 問題 [1]

$$\begin{cases} -du_{xx} = (1 - u^2)u, & x \in I, \\ u_x(\pm 1) = 0, \\ u_x(x) \geq 0, & x \in I \end{cases} \quad (1.5)$$

に対応し, その解構造は深く研究されている. (1.5) の解集合は

$$\Gamma_0 := \{(d, u) \in \mathbb{R}_+ \times C_\nu^2(\bar{I}) : u \text{ は (1.5) の非定数解}\}$$

で定義される. [1], [15] において, Γ_0 は $d = 4/\pi^2$ で定数解 $u = 0$ から分岐し, $\Gamma_0 = \{(d, \phi^*(\cdot, d)) : 0 < d < 4/\pi^2\}$ と書けることが知られている. さらに, 任意の $(x, d) \in \bar{I} \times (0, 4/\pi^2)$ に対して, $\phi^*(\cdot, d)$ は $\phi^*(x, d) = -\phi^*(-x, d)$ を満たす. よって, この奇関数解 $\phi^*(\cdot, d)$ は

$$\tilde{\Gamma}_0 := \{(0, d, u) : (d, u) \in \Gamma_0\} \subset \mathcal{S}(\mu) \text{ for all } \mu > 0.$$

を意味する.

(1.2), (1.3) において, 積分制約条件が意味を持つ $\mu > 0$ の場合はこれまでの我々の研究により, $0 < \mu < 1$ のときと $\mu > 1$ のときで解構造が変化することがわかってきた.

具体的には, [4] において $0 < \mu < 1$ のとき, $\tilde{\Gamma}_0$ の $d = \hat{d}(\mu)$ で解の対称性を崩すような 2 次分岐が存在すること, さらにそれが一意であることを示した. $d = \hat{d}(\mu)$ の表示式は

$$\hat{d}(\mu) := \frac{1}{(1 + \hat{k}(\mu)^2)K(\hat{k}(\mu))^2} \quad (1.6)$$

である. ただし, $\hat{k}(\mu)$ は k に関する方程式

$$\frac{2}{3} \left\{ \frac{1}{2} + \frac{1 + k^2}{(1 - k^2)^2} \left(-1 + k^2 + \frac{2E(k)}{K(k)} \right) \right\} = \frac{1}{\mu} \quad (0 < k < 1) \quad (1.7)$$

の一意な解である. ここで, $K(\cdot)$ と $E(\cdot)$ はそれぞれ第一種完全楕円積分と第二種完全楕円積分である.

さらに, $\hat{d}(\mu)$ は $\mu \in (0, 1)$ で単調に変化し, その極限は

$$\hat{d}(\mu) \rightarrow \frac{4}{\pi^2} \text{ as } \mu \uparrow 1, \quad (1.8)$$

$$\hat{d}(\mu) \rightarrow 0 \text{ as } \mu \downarrow 0 \quad (1.9)$$

である. これらの結果により, μ を 1 つ止めると 2 次分岐を起こす $\hat{d}(\mu)$ がすぐさま計算できる. 例えば, $\hat{d}(1/2) = 0.2668 \dots$, $\hat{d}(3/4) = 0.3336 \dots$ である.

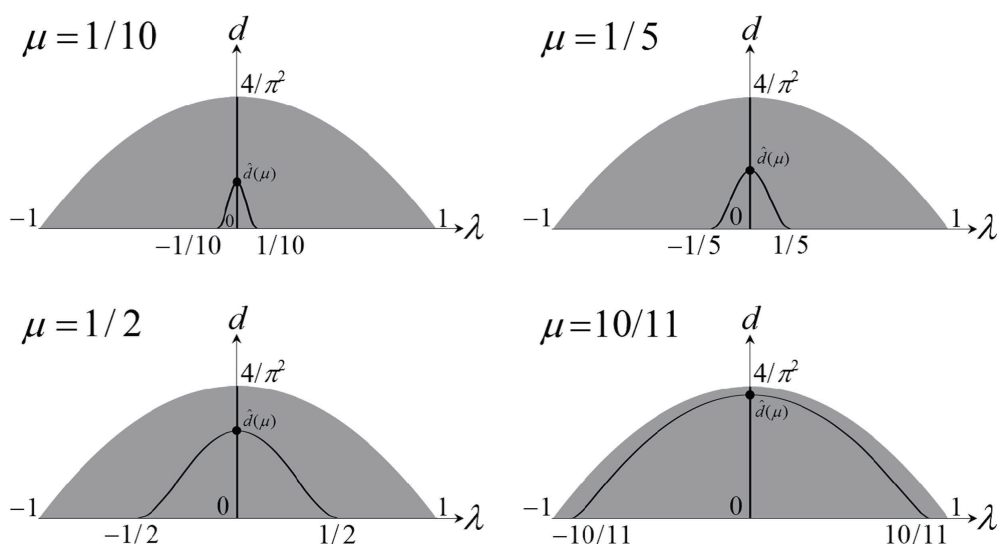


図 2 (1.2), (1.3) の解の分岐曲線

図 2 は (1.2), (1.3) の解の分岐曲線を μ を止めるごとに数値計算で描いた図である. μ ごとに 2 次分岐点 $(\lambda, d) = (0, \hat{d}(\mu))$ が一意に存在し, 2 次分岐後の枝は数値計算上, λ に関して単調あるように見える. また, (1.8), (1.9) にあるように, μ を 0 から 1 へ動かした際, 二次分岐点が 0 から $4/\pi^2$ へ近づいていく様子がみえる.

図 3 は (1.2), (1.3) の解の形状をパラメータごとに描いたものである. 図中の点 $C0, C1, C2$ は奇関数解である. 解の存在領域の境界上である $(\lambda, d) = (0, 4/\pi^2)$ で定数解は 1 次分岐を起こし奇関数解になる. 点 $C1$ は 2 次分岐点である. この点で, 奇関数解は 2 次分岐を起こし, 非対称解になる.

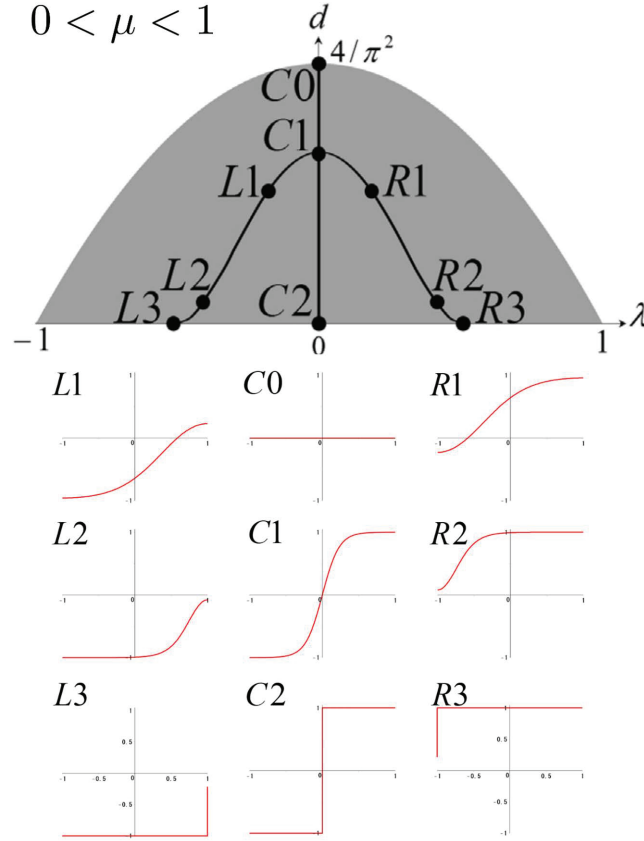


図 3 (1.2), (1.3) の解形状

また, [5] においては $\mu > 1$ の際の分岐の枝の挙動とこの場合には 2 次分岐が起こらないことを示した. 加えて, λ を止めるごとに解の個数は高々 1 個であることも [10] の結果を応用することで示している.

さらに [9] では (1.5) の解の線形化安定性を解析した. 解は $0 < d < \hat{d}(\mu)$ のとき, 安定で, $\hat{d}(\mu) < d < 4/\pi^2$ のとき, 不安定. また, d が十分小さい場合に 2 次分岐後の解は不安定であることの数学的証明を与えた.

図 4 は (1.2), (1.3) の解の安定性を分岐曲線上にまとめた図である. d が十分小さくない場合, 非対称解は数値計算上, 不安定である.

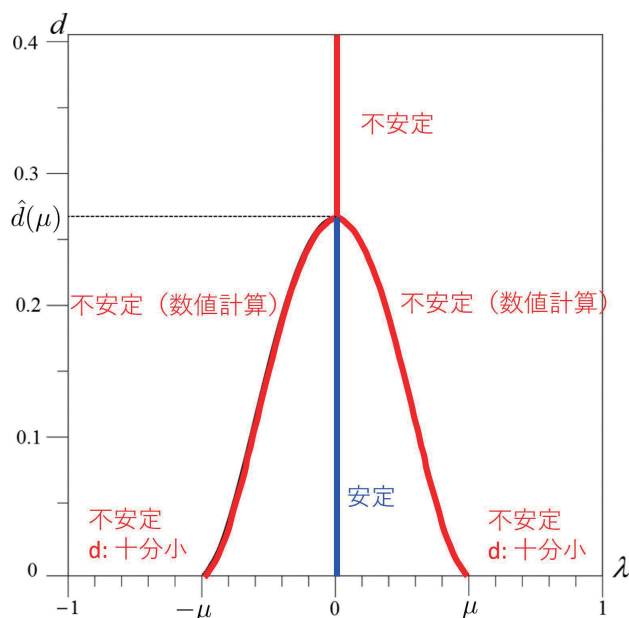


図4 (1.2), (1.3) の解の安定性

上記に述べたように、これまで、部分的な解の線形安定性、 λ をとめるごとの解の個数、2次分岐点の一意存在性など大域的分岐構造に関するの多くの性質を示してきた。しかしながら、大域的分岐構造の完全解明には図2, 4の数値計算から想像される、2次分岐後の分岐曲線の λ に関する単調性や非対象解の不安定性の研究が不十分である。

そこで、[11]では未解決課題である $0 < \mu < 1$ において一意的に起こる2次分岐の後の分岐曲線の λ に関する単調性および非対称解の安定性の解析を行うために、(1.2), (1.3)のすべての定常解からなる曲面のパラメータ表示、(1.2), (1.3)の解の表示式の導出を行った。

本稿では、[11]で得た知見を新しく解釈しなおし、上記未解決課題の解明へ至る道筋の整備を行う。

2 準備

はじめに、(1.2), (1.3)の解を求める方法について説明する。

(1.2), (1.3)を見ると、まず、(1.2)を満たす $(\lambda, d, u(x; \lambda, d))$ を求めて、次に、 $(\lambda, d, u(x; \lambda, d))$ が(1.3)を満たすかどうかを確認することで、(1.1)の解を求めることができることがわかる。ゆえに、(1.2), (1.3)の解を求めるために最初に解くべき問題は次の2つとなる：

- ・(1.2)のすべて解の表示式を導出せよ。
- ・解の区間積分量の表示式を導出せよ。

ゆえに、非局所 Allen-Cahn 方程式 (1.2), (1.3) の解析に取り掛かる前に Allen-Cahn 方程式 (1.2) の解の基本的な性質に関して説明する。(1.2)の解の存在領域、性質について次の良く知られた Proposition が成り立つ ([1])。

Proposition A. $\lambda \in (-1, 1)$, $d > 0$ とする. (1.2) の解が存在するための必要十分条件は $(\lambda, d) \in \mathcal{G}$ である. ただし,

$$\mathcal{G} := \left\{ (\lambda, d) : -1 < \lambda < 1, 0 < d < \frac{4(1-\lambda^2)}{\pi^2} \right\}. \quad (2.1)$$

さらに, 解 u は一意的である. また, $u(x; \lambda, d)$ は次の性質を持つ:

$$-1 < u(x; \lambda, d) < 1, \quad (2.2)$$

$$u(x; -\lambda, d) = -u(-x; \lambda, d). \quad (2.3)$$

図 5 は $\mathcal{G}$ が示す領域である. d 軸に関して対称であることがわかる.

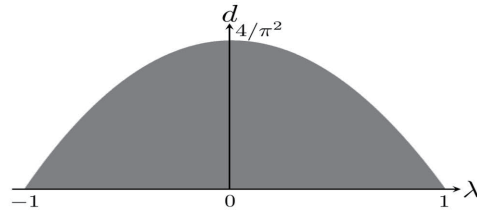


図 5 $\mathcal{G}$ が示す領域

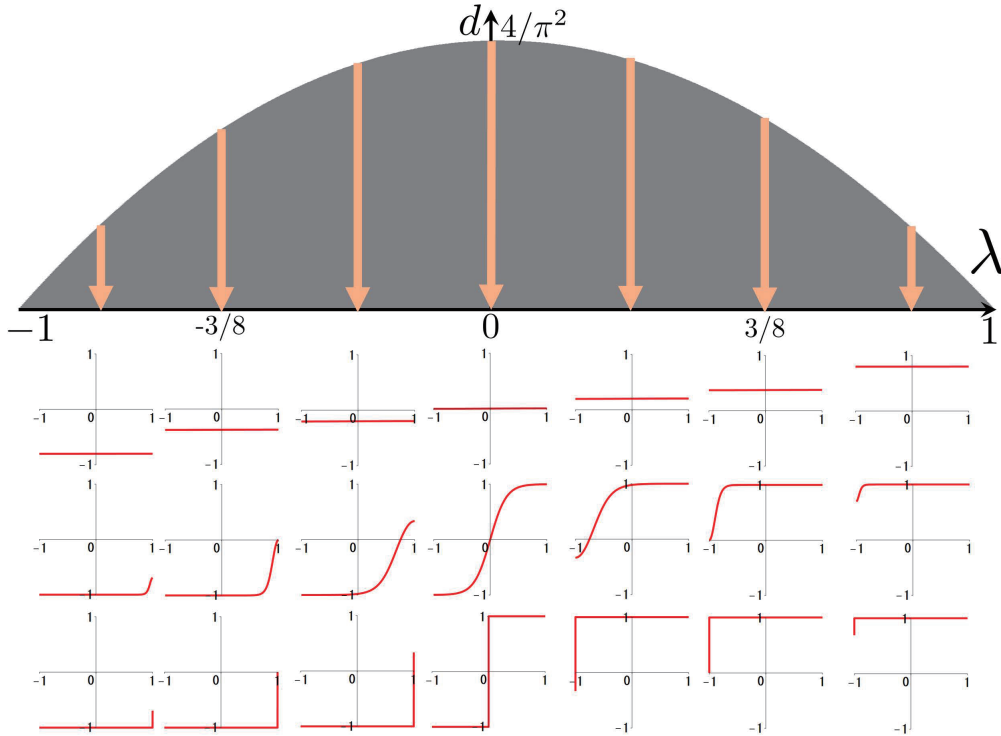


図 6 (1.2) の解形状

図 6 では λ を止め, 解の存在領域の上端から d を小さくしていくごとに解形状を数値計算で描いた. 上半分の矢印は解の存在領域における d の動かし方を表している. λ は左から順に $-0.8, -3/8, -0.2, 0, 0.2, 3/8, 0.8$ とし, d は対称な解同士, 同じものを使用した. 例えば

$\lambda = 0.2, -0.2$ の場合の d の動かし方は同じである．下半分の図は (λ, d) を止めるごとの (1.2) の解形状を描いたものである．図より，対称性 (2.3) は $\lambda = 0$ を軸として解が 180 度反転させることと同じであることがわかる．

(1.2) の解の中から (1.3) を満たすものを探すためには， (λ, d) を止めるごとに $1/2 \cdot \int_{-1}^1 u(x; \lambda, d) dx$ ，すなわち解の区間積分量の平均を計算して曲面を作り， μ ごとに，平面 λ/μ と曲面の交わり方を調べる必要がある．

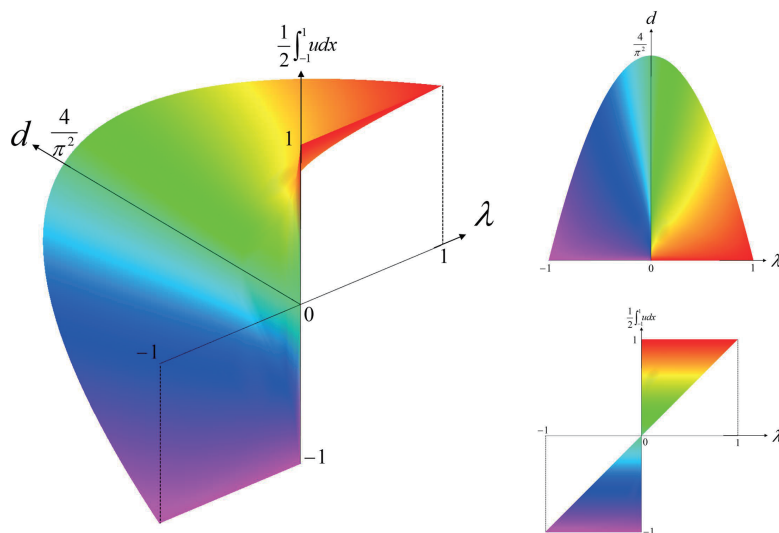


図 7 曲面 $1/2 \cdot \int_{-1}^1 u(x; \lambda, d) dx$ の形状

図 7 は曲面 $1/2 \cdot \int_{-1}^1 u(x; \lambda, d) dx$ の形状を数値計算により描いたものである．左図は鳥観図，右上図は曲面を真上から見た図，右下図は曲面を $d = 0$ の方向から見た図である．図から μ ごとに，平面 λ/μ と曲面の交わり方は曲面を斜めに切った断面のようになると想像される．このことから交わりを調べることは容易ではなく，単純に解の区間積分量の平均の曲面を考えるだけでは不十分であることがわかる．

(1.2) のすべて解の表示式と解の区間積分量の表示式を導出する際に用いる楕円関数と楕円積分について述べる．

$\text{sn}(x, k)$ は，ヤコビの楕円関数であり，以下の性質が成り立つ：

$$\text{sn}^{-1}(z, k) = \int_0^z \frac{1}{\sqrt{1 - k^2 \xi^2} \sqrt{1 - \xi^2}} d\xi \quad (-1 \leq z \leq 1, 0 < k < 1),$$

パラメータ k, ν は $k \in [0, 1)$ と $-1 < \nu < 1$ とする．第 1, 第 2, および第 3 種完全楕円積分は，それぞれ

$$K(k) := \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1 - k^2 t^2} \sqrt{1 - t^2}} dt, \quad E(k) := \int_0^1 \frac{\sqrt{1 - k^2 t^2}}{\sqrt{1 - t^2}} dt,$$

および

$$\Pi(\nu, k) := \int_0^1 \frac{1}{(1 + \nu t^2) \sqrt{1 - k^2 t^2} \sqrt{1 - t^2}} dt$$

で定義される. $K(k)$ は, k に関して単調増加であり,

$$K(0) = \frac{\pi}{2}, \quad \lim_{k \rightarrow 1} K(k) = \infty$$

である. さらに, $E(k)$ は k に関して単調減少であり,

$$E(0) = \frac{\pi}{2}, \quad \lim_{k \rightarrow 1} E(k) = 1$$

である.

3 主結果

まず, (1.2) のすべて解の表示式について述べる.

Theorem 3.1 ((1.2) のすべて解の表示式). $(\lambda, d) \in \mathcal{G}$ とする. 一意な解 $u(x; \lambda, d)$ は次で表示される:

$$\begin{aligned} u(x; \lambda, d) &= \sqrt{\frac{\lambda^2 + 3}{3}} \cdot \frac{(\beta(1 - hs) - \alpha) \cdot \operatorname{sn} \left(K(\sqrt{h}) \frac{x+1}{2}, \sqrt{h} \right)^2 + \alpha}{1 - hs \cdot \operatorname{sn} \left(K(\sqrt{h}) \frac{x+1}{2}, \sqrt{h} \right)^2} + \frac{\lambda}{3}, \end{aligned} \quad (3.1)$$

$$s := \frac{p}{1 + \sqrt{1 - hp^2}}, \quad (3.2)$$

$$\alpha := \alpha(p, h) = \frac{2 - (1 + h)p - \sqrt{1 - hp^2}}{\sqrt{(h^2 - h + 1)p^2 - 2(h + 1)p + 3}}, \quad (3.3)$$

$$\beta := \beta(p, h) = \frac{-(1 - h)p + \sqrt{1 - hp^2}}{\sqrt{(h^2 - h + 1)p^2 - 2(h + 1)p + 3}}. \quad (3.4)$$

ただし $(p, h) = (p(\lambda, d), h(\lambda, d))$ は次の (p, h) についての連立超越方程式

$$\begin{cases} \mathcal{A}(p, h) = \sin \left(3 \operatorname{Arctan} \left(\frac{\lambda}{\sqrt{3}} \right) \right), \\ \mathcal{E}(p, h) = \frac{\sqrt{3}}{2} \sqrt{\frac{d}{\lambda^2 + 3}}, \\ (p, h) \in \mathcal{G}_{p, h} := \left\{ 0 < p < \frac{2}{1 + h}, \ 0 < h < 1 \right\} \end{cases} \quad (3.5)$$

の一意な解である. また, $\mathcal{A}(p, h)$ と $\mathcal{E}(p, h)$ は

$$\mathcal{A}(p, h) := \frac{3\sqrt{3}(1 - p)(1 - hp)\sqrt{1 - hp^2}}{\left(\sqrt{(h^2 - h + 1)p^2 - 2(1 + h)p + 3} \right)^3}, \quad (3.6)$$

$$\mathcal{E}(p, h) := \frac{\frac{\sqrt{p(2 - (1 + h)p)}}{\sqrt{2}K(\sqrt{h})}}{\sqrt{(h^2 - h + 1)p^2 - 2(1 + h)p + 3}} \quad (3.7)$$

で定義される関数である.

さらに $\lambda \in (-1, 1)$ でとめるごとに, 次が成り立つ

$$d \downarrow 0 \Leftrightarrow h(\lambda, d) \uparrow 1. \quad (3.8)$$

この表示式では $(\lambda, d) \in \mathcal{G}$ を 1 つ止めるごとに, 一意に定まる $(p(\lambda, d), h(\lambda, d))$ を用いて, $u(x; \lambda, d)$ を表示している. 図 8 は $\mathcal{G}$ と $\mathcal{G}_{p,h}$ の関係を描いたものである. $\mathcal{G}$ において, $\lambda > 0$ の領域は赤色, $\lambda < 0$ の領域は青色で塗り分けてある. $\mathcal{G}_{p,h}$ では $\lambda > 0$ の場合に対応する (p, h) の領域を赤色, $\lambda < 0$ の場合に対応する (p, h) の領域を青色に塗り分けている. $\lambda > 0$ の存在領域は, ちょうど $(p, h) \in (0, 1) \times (0, 1)$ と同じになることが特徴である.

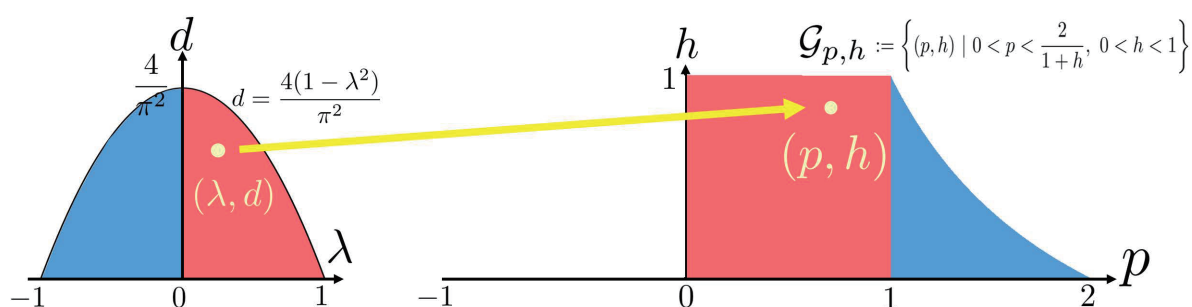


図 8 $\mathcal{G}$ (左図) と $\mathcal{G}_{p,h}$ (右図)

$\mathcal{G}$ と $\mathcal{G}_{p,h}$ を比べると $\lambda > 0$ に対応する領域と $\lambda < 0$ に対応する領域の並びが左右入れ替わっている. また, (3.8) にあるように h の大小の方向と p の大小の方向は反対になる.

図の直観的理解と解析の行いやすさの観点から変数変換 $P = 1 - p$, $H = 1 - h$ を $\mathcal{G}_{p,h}$ に適応する. すると, $\mathcal{G}_{p,h}$ は

$$\mathcal{G}_{P,H} := \left\{ \frac{2}{2+H} < P < 1, 0 < H < 1 \right\} \quad (3.9)$$

に変換される.

図 9 は $\mathcal{G}$ と変数変換後の $\mathcal{G}_{P,H}$ の関係を描いたものである. $\mathcal{G}$ における領域の対称性が $\mathcal{G}_{P,H}$ で失われている理由は解の表示式が任意の $(\lambda, d) \in \mathcal{G}$ について成り立つものであるからである. 領域の対称性を保ちたい場合, $\lambda \geq 0$ の場合と $\lambda < 0$ の場合についてそれぞれ解の表示式を書けばよい. 実際に解析を行う場面において対称性 (2.3) より, $\lambda < 0$ の解は $\lambda > 0$ の解を用いて計算できるので, 考えるべき (λ, d) の範囲は

$$\mathcal{G}_+ := \{(\lambda, d) : (\lambda, d) \in \mathcal{G} \text{ and } \lambda > 0\}, \quad (3.10)$$

で, パラメータ (P, H) の範囲は

$$\mathcal{G}_{+,P,H} := \{0 < P < 1, 0 < H < 1\} \quad (3.11)$$

であることわかる.

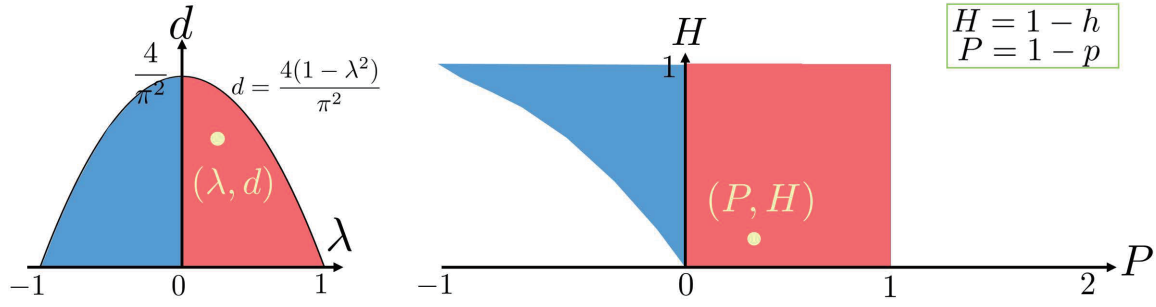


図 9 $\mathcal{G}$ (左図) と $\mathcal{G}_{P,H}$ (右図)

Theorem 3.1 で得られた解の表示式を用いた解析では常に (λ, d) の背後にある (P, H) を意識しながら解析することになる. この困難さを回避するために, $(\lambda, d, u(x; \lambda, d))$ の (P, H) によるパラメータ表示が必要である. 次の Theorem 3.2 は λ と d のパラメータ表示式を示したものである. λ のパラメータ表示式 $\lambda(p, h)$ は (3.5) の第 1 式を λ に解きなおすことで得られ, d のパラメータ表示式は (3.5) の第 2 式を d について解き, λ に $\lambda(p, h)$ を代入すれば得られる.

Theorem 3.2 (λ と d のパラメータ表示式). 次が成り立つ.

$$\lambda(p, h) := \sqrt{3} \tan \left(\frac{1}{3} \operatorname{Arcsin} (\mathcal{A}(p, h)) \right), \quad (3.12)$$

$$d(p, h) := 4 \cdot \frac{\mathcal{E}(p, h)^2}{\cos^2 \left(\frac{1}{3} \operatorname{Arcsin} (\mathcal{A}(p, h)) \right)}. \quad (3.13)$$

ただし, $\mathcal{A}(p, h)$ と $\mathcal{E}(p, h)$ はそれぞれ (3.6), (3.7) で定義される関数. さらに, $(p, h) \in \mathcal{G}_{p,h}$ に対して $\lambda = \lambda(p, h)$, $d = d(p, h)$, $u = u(x; \lambda(p, h), d(p, h))$ は (1.2) を満たす.

(1.2) 解を (P, H) から求める方法を説明する. $(P, H) \in \mathcal{G}_{+,P,H}$ を 1 つ与える. 次に (p, h) を $p = 1 - P$, $h = 1 - H$ で計算する. 得られた (p, h) を用いると $(\lambda(p, h), d(p, h), u(x; \lambda(p, h), d(p, h)))$ が求められる.

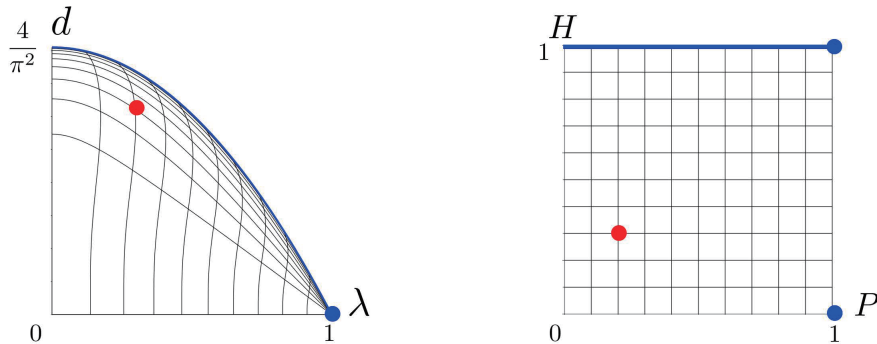


図 10 $\mathcal{G}_+$ (左図) と $\mathcal{G}_{+,P,H}$ (右図) の対応関係

図 10 は $\mathcal{G}$ 上の点と $\mathcal{G}_{+,P,H}$ 上の点がどのように対応しているかを描いたものである．右の図は $\mathcal{G}_{+,P,H}$ を P 方向, H 方向それぞれ 0.1 刻みでメッシュを切った図である．左の図は右の図のメッシュ上のすべての点を $\mathcal{G}_+$ 上に移したらどのようなメッシュになるかを描いた図である．図中の赤い点は具体的なある点がどの点に移ったかを示している．メッシュ形状の変化から, $\mathcal{G}_{+,P,H}$ において H を止めた線は $\mathcal{G}_+$ 上では単調減少な曲線に移っていることがわかる．

Theorem 3.3 は (1.2) の解の区間積分量の平均の表示式を示している．

Theorem 3.3 ((1.2) の解の区間積分量の平均の表示式)． $u(x; \lambda, d)$ を (1.2) の一意な解とする． $(\lambda, d) \in \mathcal{G}$ に対して次が成り立つ

$$\frac{1}{2} \int_{-1}^1 u(x; \lambda, d) dx = \sqrt{\frac{\lambda^2 + 3}{3}} \cdot \mathcal{M}(p(\lambda, d), h(\lambda, d)) + \frac{\lambda}{3} \quad (3.14)$$

ただし,

$$\begin{aligned} & \mathcal{M}(p, h) \\ &:= \frac{(1+h)p - 2 - \sqrt{1 - hp^2} + 2(2 - p(1+h)) \cdot \frac{\Pi\left(-\frac{hp}{1 + \sqrt{1 - hp^2}}, \sqrt{h}\right)}{K(\sqrt{h})}}{\sqrt{(h^2 - h + 1)p^2 - 2(1+h)p + 3}} \end{aligned} \quad (3.15)$$

であり, $p = p(\lambda, d)$, $h = h(\lambda, d)$ は Theorem 3.1 で与えられる．

さらに, (3.14) の $(p, h) \in \mathcal{G}_{p,h}$ によるパラメータ表示は

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_{-1}^1 u(x; \lambda(p, h), d(p, h)) dx \\ &= \frac{\mathcal{M}(p, h)}{\cos\left(\frac{1}{3} \text{Arcsin}(\mathcal{A}(p, h))\right)} + \frac{1}{3} \cdot \sqrt{3} \cdot \tan\left(\frac{1}{3} \text{Arcsin}(\mathcal{A}(p, h))\right) \end{aligned} \quad (3.16)$$

となる．ただし, $\mathcal{A}(p, h)$, $\lambda(p, h)$, $d(p, h)$ はそれぞれ, (3.6), (3.12), (3.13) で定義される関数．

各 (λ, d) に対する (1.2) の一意解を $u(x; \lambda, d)$ とすると,

$$\lambda = \mu \cdot \frac{1}{2} \int_{-1}^1 u(x; \lambda, d) dx \quad (3.17)$$

$\Leftrightarrow$

$$\frac{1}{2\lambda} \int_{-1}^1 u(x; \lambda, d) dx - \frac{1}{3} = \frac{1}{\mu} - \frac{1}{3} \quad (3.18)$$

$\Leftrightarrow$

$$\left(\frac{1}{2\lambda} \int_{-1}^1 u(x; \lambda, d) dx - \frac{1}{3}\right)^{-1} = \left(\frac{1}{\mu} - \frac{1}{3}\right)^{-1} \quad (3.19)$$

$\Leftrightarrow$

$$\frac{\lambda}{\sqrt{\frac{\lambda^2}{3} + 1}} \cdot \frac{1}{\mathcal{M}(p(\lambda, d), h(\lambda, d))} = \left(\frac{1}{\mu} - \frac{1}{3}\right)^{-1} \quad (3.20)$$

を得る. ここで, $\Xi(\lambda, d)$ を

$$\Xi(\lambda, d) := \frac{\lambda}{\sqrt{\frac{\lambda^2}{3} + 1}} \cdot \frac{1}{\mathcal{M}(p(\lambda, d), h(\lambda, d))} \quad \text{for } (\lambda, d) \in \mathcal{G}. \quad (3.21)$$

と定義する. $\Xi(\lambda, d)$ のパラメータ表示式は $\lambda(p, h)$, $d(p, h)$ を使って

$$\Xi(\lambda(p, h), d(p, h)) := \frac{\sqrt{3} \cdot \sin\left(\frac{1}{3} \text{Arcsin}(\mathcal{A}(p, h))\right)}{\mathcal{M}(p, h)} \quad \text{for } (p, h) \in \mathcal{G}_{p, h}. \quad (3.22)$$

と書ける.

以上より, (1.2), (1.3) の分岐曲線は μ を 1 つ止めるごとに決まる曲面

$$\{(\lambda, d, \Xi(\lambda, d)) : (\lambda, d) \in \mathcal{G}_+\} \quad (3.23)$$

の高さ

$$\left(\frac{1}{\mu} - \frac{1}{3}\right)^{-1} \quad (3.24)$$

の等高線である. 言い換えると, (1.2), (1.3) のすべての解からなる曲面 (3.23) は分岐曲線を積み重ねて作ることができる曲面である. したがって, 分岐曲線の形状の解析を行うため, 曲面 (3.23) の表示式に興味が出てくる. 曲面のパラメータ表示を次の定理に示す.

Theorem 3.4 (曲面 (3.23) のパラメータ表示). 次が成り立つ.

$$\begin{aligned} & \left\{ \left(\lambda, d, \left(\frac{1}{2\lambda} \int_{-1}^1 u(x; \lambda, d) dx - \frac{1}{3} \right)^{-1} \right) : (\lambda, d) \in \mathcal{G}_+ \right\} \\ &= \{(\lambda(p, h), d(p, h), \Xi(\lambda(p, h), d(p, h))) : (p, h) \in (0, 1) \times (0, 1)\} \end{aligned} \quad (3.25)$$

ただし, $\lambda(p, h)$, $d(p, h)$, $\Xi(\lambda(p, h), d(p, h))$ はそれぞれ (3.12), (3.13), (3.22) で定義される関数. また, $\mathcal{A}(p, h)$, $\mathcal{E}(p, h)$, $\mathcal{M}(p, h)$ はそれぞれ (3.6), (3.7), (3.15) で定義される関数.

図 11 は曲面 (3.23) を描いたものである. 曲面上にある黒色の曲線は下から $\mu = 3/100$, $1/4$, $1/2$, $3/4$, $97/100$ ごとに止めて描いた高さ $(1/\mu - 1/3)^{-1}$ の等高線である.

図 12 は曲面 (3.25) を描いたものである. λ, d の増減の方向とパラメータの増減の方向を一致させるため, $p = 1 - P$, $h = 1 - H$ と変数変換を行い PH -空間で曲面を描いてある. この変数変換を行うと, $\lambda = 0$ は $H = 0$ に, $d = 0$ は $P = 0$ に対応する. 曲面上にある曲線は図 11 と同じ設定である.

図 13 は曲面 (3.23) を λ, d が底面になるように真上から見た図である. $(\lambda, d) = (0, \hat{d}(\mu))$ が 2 次分岐点であるので, 図中に描かれている黒色の曲線は μ を止めるごとの (1.2), (1.3) の 2 次分岐後の分岐曲線となる.

μ は一番内側の黒色の曲線からそれぞれ, $\mu = 3/100, 1/4, 1/2, 3/4, 97/100$ である.

図 14 は曲面 (3.25) を P, H が底面になるように真上から見た図である. 黒色の曲線が μ を止めるごとの (1.2), (1.3) の 2 次分岐後の分岐曲線で, μ は一番内側の黒色の曲線からそれぞれ, $\mu = 3/100, 1/4, 1/2, 3/4, 97/100$ である.

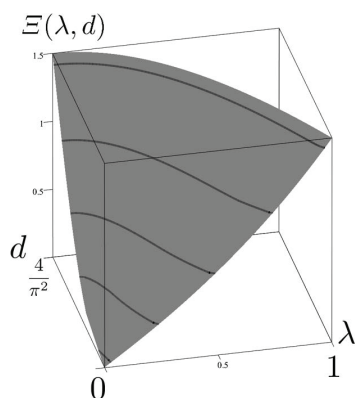


図 11 曲面 (3.23) の鳥瞰図

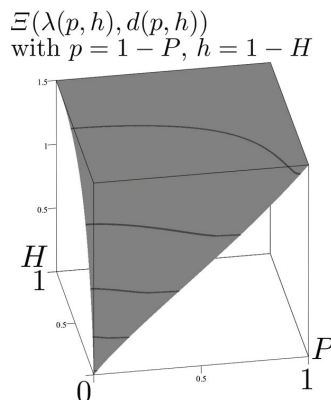


図 12 曲面 (3.25) の鳥瞰図

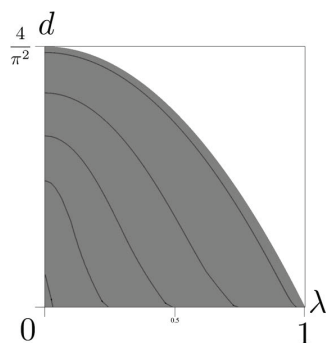


図 13 曲面 (3.23) を真上から見た図

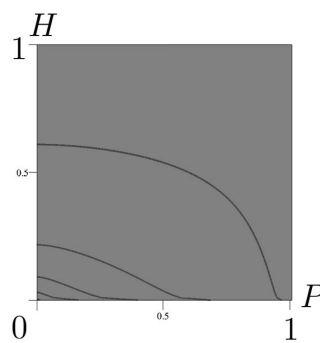


図 14 曲面 (3.25) を真上から見た図

上記の図 13 を見ると, μ ごとのそれぞれの曲線は 2 次分岐点 $(\lambda, d) = (0, \hat{d}(\mu))$ の近くで λ に関して単調であることがわかる. これは 2 次分岐後に saddle-node 分岐点が存在しないことを表している. したがって, 2 次分岐後の解の安定性は曲面が λ に関して単調であることを示せばよい. 図 10 の考察と合わせてみると, 分岐曲線の λ に関する単調性を示すにはパラメータ範囲の単純さから $P - H$ 平面での分岐曲線の単調性を示し, $\lambda - d$ 平面に還元すればよいという方針がたつ.

しかしながら, Theorem 3.4 で導出した曲面のパラメータ表示は完全楕円積分, 三角関数, 逆三角関数を含む極めて複雑な式である. 直接, このパラメータ表示を取り扱うことは困難であるので, 曲面のパラメータ表示から三角関数, 逆三角関数が消えるように変形を行う.

Theorem 3.5. $\mu \in (0, 1)$ とする. このとき, 等高線

$$\Xi(\lambda(p, h), d(p, h)) = \left(\frac{1}{\mu} - \frac{1}{3} \right)^{-1} \quad \text{in } (p, h) \in (0, 1) \times (0, 1) \quad (3.26)$$

は

$$\frac{4}{9} \cdot \left(\frac{\mathcal{M}(p, h)}{\frac{1}{\mu} - \frac{1}{3}} \right)^3 - \frac{\mathcal{M}(p, h)}{\frac{1}{\mu} - \frac{1}{3}} + \frac{\mathcal{A}(p, h)}{\sqrt{3}} = 0 \quad \text{in } (p, h) \in (0, 1) \times (0, 1) \quad (3.27)$$

と等しい. ただし, $\Xi(\lambda(p, h), d(p, h))$, $\mathcal{M}(p, h)$, $\mathcal{A}(p, h)$ はそれぞれ (3.22), (3.15), (3.6) で定義される関数である.

4 まとめと今後の課題

本稿では 1 次元定常非局所 Allen-Cahn 方程式のノイマン問題 (1.1) の大域的分岐構造において, 未解明であった, 2 次分岐後の分岐曲線の単調性や非対象解の不安定性の解析の前処理を行った. その結果, 解の分岐曲線の λ に関する単調性を示すには $(P, H) \in (0, 1) \times (0, 1)$ に対して μ を止めるごとに決まる, 楕円積分のみを含むの分数関数の 0 等高線を解析すればよいことがわかった.

今後の課題は μ ごとの 0 等高線の挙動を詳細に調べ, 解の分岐曲線の λ に関する単調性を示し, d を止めるごとの解の個数, 2 次分岐後に現れる非対称解の不安定性の数学的証明を与えることである.

参考文献

- [1] N. Chafee, E. F. Infante, A bifurcation problem for a nonlinear partial differential equation of parabolic type, *Applicable Anal.*, **4** (1974/75), 17–37.
- [2] X. Chen, D. Hilhorst and E. Logak, Asymptotic behavior of solutions of an Allen-Cahn equations with a nonlocal term, *Nonlinear Anal. TMA*, **28** (1997), 1283–1298.
- [3] S. Kosugi, Y. Morita and S. Yotsutani, Stationary solutions to the one-dimensional Cahn-Hilliard equation: Proof by the complete elliptic integrals, *Discrete Contin. Dyn. Syst.*, **19**(2007), 609–629.
- [4] K. Kuto, T. Mori, T. Tsujikawa and S. Yotsutani, Secondary bifurcation for a nonlocal Allen-Cahn equation, *J. Differential Equations*, **263** (2017), 2687–2714.
- [5] K. Kuto, T. Mori, T. Tsujikawa and S. Yotsutani, Global solution branches for a non-local Allen-Cahn equation, *J. Differential Equations*, **264** (2018), 5928–5949.

- [6] K. Kuto and T. Tsujikawa, Bifurcation structure of steady-states for bistable equations with nonlocal constraint, Proceedings of the 9th AIMS conference 2012, *Discrete Contin. Dyn. Syst.*, Special issue (2013), 467–476.
- [7] Y. Lou, W.-M. Ni and S. Yotsutani, On a limiting system in the Lotka-Volterra competition with cross-diffusion. Partial differential equations and applications, *Discrete Contin. Dyn. Syst.*, 10 (2004), no. 1-2, 435-458.
- [8] T. Mori, K. Kuto, M. Nagayama, T. Tsujikawa and S. Yotsutani, Global bifurcation sheet and diagrams of wave-pinning in a reaction-diffusion model for cell polarization, Proceedings of the 10th AIMS conference 2014, *Discrete Contin. Dyn. Syst.*, Special issue (2015), 861-877.
- [9] Y. Miyamoto, T. Mori, T. Tsujikawa and S. Yotsutani, Stability for stationary solutions of a nonlocal Allen-Cahn equation, *J. Differential Equations*, submitted.
- [10] T. Mori, K. Kuto, T. Tsujikawa and S. Yotsutani, Exact multiplicity of a stationary limiting problem of a cell polarization model, *Discrete Contin. Dyn. Syst. Series A*, 36 (2016) no.10, 5627-5655.
- [11] T. Mori, K. Kuto, T. Tsujikawa and S. Yotsutani, Representation formulas of solutions and bifurcation sheets to a nonlocal Allen-Cahn equation, *Discrete Contin. Dyn. Syst.*, submitted.
- [12] Y. Mori, A. Jilkin and L. Edelstein-Keshet, Asymptotic and bifurcation analysis of wave-pinning in a reaction-diffusion model for cell polarization, *SIAM J. Appl. Math.*, **71** (2011), 1401–1427.
- [13] M. Murai, K. Sakamoto and S. Yotsutani, Representation formula for traveling waves to a derivative nonlinear Schrödinger equation with the periodic boundary condition, *Discrete Contin. Dyn. Syst.*, Special issue (2015), 878-900.
- [14] M. Murai, W. Mastumoto and S. Yotsutani, Representation formula for the plane elastic closed curve, *Discrete Contin. Dyn. Syst.*, Special issue (2013), 565-585.
- [15] R. Schaaf, Global solution branches of two-point boundary value problems. Lecture Notes in Mathematics, 1458. Springer-Verlag, Berlin, 1990.
- [16] S. Tasaki and T. Suzuki, Stationary Fix-Caginalp equation with non-local term, *Nonlinear Anal., TMA*, **71** (2009), 1329–1349.
- [17] T. Wakasa and S. Yotsutani, Limiting Classification on Linearized Eigenvalue Problems for 1-dimensional Allen-Cahn Equation II – Asymptotic formulas of eigenfunctions, *J. Differential Equations*, **261** (2016), 5465–5498.

(原稿提出: 2019 年 12 月 24 日)