

Discretization of reaction diffusion systems without subtraction and stabilities of their equilibrium solutions

メタデータ	言語: jpn 出版者: 公開日: 2019-08-23 キーワード (Ja): キーワード (En): 作成者: 松家, 敬介 メールアドレス: 所属:
URL	https://mu.repo.nii.ac.jp/records/1090

反応拡散系の減算のない離散化と平衡解の安定性について

Discretization of reaction diffusion systems without subtraction and stabilities of their equilibrium solutions

松 家 敬 介¹

Keisuke Matsuya

概要

本稿では反応項が有理式である反応拡散系に対応する常微分方程式系の離散化を用いることで反応拡散系の減算のない離散化を与えた。今回の離散化で得られた偏差分方程式系は元の反応拡散系と同じ平衡解をもち、それぞれの平衡解の安定性について考察し、Turing 不安定性が生じる条件について比較した。その結果、差分刻みを十分小さくすることで離散化で得られた偏差分方程式系の Turing 不安定性が生じる条件が元の反応拡散系のそれに近づくことが分かった。

1 はじめに

反応拡散系はいくつかの物質が拡散および反応する現象を偏微分方程式によって数理モデル化したものである。反応拡散系の解を具体的に書き下すことは一般的には困難であるが、計算機によって数値計算を行ったり、その平衡解のまわりの安定性を議論することで解の性質を知ることができる。

微分方程式を数値的に扱う手法の一つとして差分方程式に離散化する手法が挙げられる。離散化で得られた差分方程式の解は元の微分方程式の解と類似した性質をもつことが期待されるが、それぞれの解の性質、例えば平衡解の安定性といったものは必ずしも一致するとは限らない。解の性質が異なってしまうことは、微分方程式を数値的に扱う上でも不都合なことである。このような背景から、筆者は、離散化で得られた差分方程式の解の性質が元の微分方程式の解の性質とほぼ一致するような離散化を見いだしたり、微分方程式を離散化したことでそれぞれの方程式の解にどういった違いが生じるかについて興味をもっている。

微分方程式を離散化して得られる有理式の形をした差分方程式に対して超離散化 [1, 2] と呼ばれる極限操作を行うことで新たな差分方程式が得られる。超離散化で得られた差分方程式はまるめ誤差を考える必要がなく、数値計算に適している。さらに、方程式の解として箱玉系 [1, 3] を代表とするセルオートマトンが得られることもある。セルオートマトンとは有限の状態をとる離散力学系のことである。箱玉系はソリトン方程式に代表される可積分系の方程式と超離散化によってつながっている。筆者は離散化だけでなく超離散化であって可積分系の方程式とは限らない微分方程式の解の性質を保持するものを探すことにも興味をもっている。ただ、差分方程式に減算があると極限をとることができないために超離散化を行うことができない

¹ 武蔵野大学数理工学センター員 / 武蔵野大学工学部数理工学科講師

[2]. そこで, 本稿では反応項が有理式である反応拡散系に対して減算を含まない離散化を与える. さらに, 得られた偏差分方程式系と元の反応拡散系の平衡解の安定性の関係について議論する.

本稿の構成は, 第 2 節で反応拡散系に対応する常微分方程式系の減算のない離散化について述べ, 反応拡散系の減算のない離散化を紹介する. そして, 第 3 節で離散化で得られた偏差分方程式系と元の反応拡散系のそれぞれの平衡解の安定性とその関連について述べる. 最後に, 第 4 節では本稿の結論と今後の課題を示す.

2 反応拡散系の減算のない離散化

本稿では以下の形をした反応拡散系:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = D_u \Delta u + f_1(u, v) - u g_1(u, v) \\ \frac{\partial v}{\partial t} = D_v \Delta v + f_2(u, v) - v g_2(u, v) \end{cases} \quad (1)$$

の離散化について考える. ただし, $u = u(t, x)$, $v = v(t, x)$, $t \geq 0$, $x \in \mathbb{R}^d$, $D_u, D_v > 0$, Δ は d 次元ラプラシアンとし, $f_j(u, v)$, $g_j(u, v)$ ($j = 1, 2$) は減算を含まない u, v による有理式であるとする. 本節では (1) の離散化の手法を紹介する.

2.1 反応拡散系に対応する常微分方程式系の離散化

(1) の離散化を議論する準備として, 本節では (1) の空間一様な解が満たす常微分方程式系:

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = f_1(u, v) - u g_1(u, v) \\ \frac{dv}{dt} = f_2(u, v) - v g_2(u, v) \end{cases} \quad (2)$$

の離散化について紹介する. この離散化は [4] で報告されているものである.

(2) に対して微分を差分商に置き換えるという自然な離散化を施すと, 次の差分方程式系:

$$\begin{cases} \frac{u^{s+1} - u^s}{\delta} = f_1(u^s, v^s) - u^s g_1(u^s, v^s) \\ \frac{v^{s+1} - v^s}{\delta} = f_2(u^s, v^s) - v^s g_2(u^s, v^s) \end{cases}$$

が得られる. ただし, $s \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ であり, $\delta > 0$ は時刻 t に対する差分刻みである. この差分方程式系に対して非負の初期条件を与えたとき, 差分刻み δ の値によっては必ずしも非負の解が得られるとは限らない. これは (2) の場合と異なる状況である. 実際に, (2) に対して非負の初期条件を与えたとき, 非負の解が得られることが (2) の方程式系の形から分かる. そこで, 解の非

負値性を保存する離散化を考えたい. そのような離散化を施すと, 次の差分方程式系:

$$\begin{cases} u^{s+1} = \frac{u^s + \delta f_1(u^s, v^{s+1})}{1 + \delta g_1(u^s, v^{s+1})} \\ v^{s+1} = \frac{v^s + \delta f_2(u^s, v^s)}{1 + \delta g_2(u^s, v^s)} \end{cases} \quad (3)$$

が得られる. 実際に (3) の右辺を $\delta = 0$ のまわりで Taylor 展開すると

$$\begin{aligned} u^{s+1} &= u^s + \delta \{f_1(u^s, v^{s+1}) - u^s g_1(u^s, v^{s+1})\} + O(\delta^2) \\ v^{s+1} &= v^s + \delta \{f_2(u^s, v^s) - v^s g_2(u^s, v^s)\} + O(\delta^2) \end{aligned}$$

と変形できるからである. また, (3) に減算がないことから, (3) に対して非負の初期条件を与えると非負の解が得られることも分かる.

注意 1 以下に挙げる常微分方程式系:

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = \tilde{f}_1(u, v) - \tilde{g}_1(u, v) \\ \frac{dv}{dt} = \tilde{f}_2(u, v) - \tilde{g}_2(u, v) \end{cases}$$

に対してもここで述べた離散化と類似した離散化を施すと, 次の差分方程式:

$$\begin{cases} u^{s+1} = \frac{u^s + \delta \tilde{f}_1(u^s, v^{s+1})}{u^s + \delta \tilde{g}_1(u^s, v^{s+1})} u^s \\ v^{s+1} = \frac{v^s + \delta \tilde{f}_2(u^s, v^s)}{v^s + \delta \tilde{g}_2(u^s, v^s)} v^s \end{cases}$$

が得られるが, $\tilde{g}_1$ および $\tilde{g}_2$ の関数形によっては $(u^s, v^s) \equiv (0, 0)$ という元の常微分方程式系にはない平衡解が得られることもある.

2.2 反応拡散系の減算のない離散化

ここでは (3) を元にして (1) の離散化を行う. 以下に定義する量:

$$m_a(u_n^s) := \frac{a}{a+2d} u_n^s + \sum_{k=1}^d \frac{u_{n+e_k}^s + u_{n-e_k}^s}{a+2d}, \quad m_b(v_n^s) := \frac{b}{b+2d} v_n^s + \sum_{k=1}^d \frac{v_{n+e_k}^s + v_{n-e_k}^s}{b+2d}$$

を用いて拡散項の効果を取り入れる. ただし, $n \in \mathbb{Z}^d$, $a, b \geq 0$ であり, $e_k \in \mathbb{Z}^d$ は第 k 成分が 1 の単位ベクトルとする. そこで, $m_a(u_n^s)$ および $m_b(v_n^s)$ を用いた以下の偏差分方程式系:

$$\begin{cases} u_n^{s+1} = \frac{m_a(u_n^s) + \delta f_1(m_a(u_n^s), v_n^{s+1})}{1 + \delta g_1(m_a(u_n^s), v_n^{s+1})} \\ v_n^{s+1} = \frac{m_b(v_n^s) + \delta f_2(m_a(u_n^s), m_b(v_n^s))}{1 + \delta g_2(m_a(u_n^s), m_b(v_n^s))} \end{cases} \quad (4)$$

を考える. (4) に対して連続極限: $\delta \rightarrow +0$ を施すことで, (1) が得られる. 実際に, (4) の右辺を $\delta = 0$ のまわりで展開すると,

$$\begin{aligned} u_n^{s+1} &= m_a(u_n^s) + \delta \{f_1(m_a(u_n^s), v_n^{s+1}) - m_a(u_n^s) g_1(m_a(u_n^s), v_n^{s+1})\} + O(\delta^2) \\ v_n^{s+1} &= m_b(v_n^s) + \delta \{f_2(m_a(u_n^s), m_b(v_n^s)) - m_b(v_n^s) g_2(m_a(u_n^s), m_b(v_n^s))\} + O(\delta^2) \end{aligned}$$

と変形でき, ここで, a および b が

$$\xi = \sqrt{D_u \delta(a + 2d)} = \sqrt{D_v \delta(b + 2d)}$$

を満たすとする, と,

$$\begin{aligned} \frac{m_a(u_n^s) - u_n^s}{\delta} &= D_u \sum_{k=1}^d \frac{u_{n+e_k}^s - 2u_n^s + u_{n-e_k}^s}{\xi^2} \\ \frac{m_b(v_n^s) - v_n^s}{\delta} &= D_v \sum_{k=1}^d \frac{v_{n+e_k}^s - 2v_n^s + v_{n-e_k}^s}{\xi^2} \end{aligned}$$

となることから, (4) が (1) の離散化となっていることが分かる.

注意 2 ここで紹介した反応拡散系の離散化の手法は反応項の条件を緩めた方程式系:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = D_u \Delta u + \tilde{f}_1(u, v) \\ \frac{\partial v}{\partial t} = D_v \Delta v + \tilde{f}_2(u, v) \end{cases} \quad (5)$$

にも適用できる. 実際に, この反応拡散系に対応する常微分方程式系の離散化として次の差分方程式系:

$$\begin{cases} u_n^{s+1} = \tilde{f}_1(u^s, v^s; \delta) := u^s + \delta \tilde{f}_1(u^s, v^s) + O(\delta^2) \\ v_n^{s+1} = \tilde{f}_2(u^s, v^s; \delta) := v^s + \delta \tilde{f}_2(u^s, v^s) + O(\delta^2) \end{cases}$$

が得られれば, 偏差分方程式系:

$$\begin{cases} u_n^{s+1} = \tilde{f}_1(m_a(u_n^s), m_b(v_n^s); \delta) \\ v_n^{s+1} = \tilde{f}_2(m_a(u_n^s), m_b(v_n^s); \delta) \end{cases}$$

とすることで, この方程式に連続極限: $\delta \rightarrow +0$ を施すと (5) が得られる.

注意 3 拡散項の離散化を今回と違ったものにしても拡散項の効果を取り入れられる. 実際に, (4) において $m_a(u_n^s)$ および $m_b(v_n^s)$ の代わりに

$$\tilde{m}_p(u_n^s) := \sum_{k=1}^d \frac{u_{n+pe_k}^s + u_{n-pe_k}^s}{2} \quad \text{および} \quad \tilde{m}_q(v_n^s) := \sum_{k=1}^d \frac{v_{n+qe_k}^s + v_{n-qe_k}^s}{2}, \quad p, q \in \mathbb{Z}_{>0}$$

を用いても連続極限: $\delta \rightarrow +0$ を施すことで (1) が得られる偏差分方程式系が得られる. 筆者はこれまでの研究で, 拡散項をここで挙げた離散化を用いることで反応拡散系 Gray-Scott モデルの離散化を行い, その解が表す時空パターンについて調べた. 詳しくは, [5, 6] を参照されたい.

3 (1) および (4) それぞれの平衡解の安定性について

本節では, (1) および (4) それぞれの平衡解の安定性, 特に線形安定性および $d = 1$ とした場合の Turing 不安定性の関連について議論する. ここで, (1) および (4) の平衡解とは (u, v) または (u_n^s, v_n^s) がそれぞれ定数関数となる解 (u^*, v^*) のことであり, それぞれの平衡解は完全に一致し,

$$\begin{cases} f_1(u^*, v^*) - u^* g_1(u^*, v^*) = 0 \\ f_2(u^*, v^*) - v^* g_2(u^*, v^*) = 0 \end{cases}$$

を満たす.

3.1 (1) の平衡解の安定性について

まず, 平衡解 (u^*, v^*) の (2) における線形安定性および (1) における Turing 不安定性についてまとめる. 反応拡散系 (1) に対応する常微分方程式系 (2) をこの平衡解のまわりで線形化した方程式系は,

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \tilde{u} \\ \tilde{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{1,u}^* - g_1^* - u^* g_{1,v}^* & f_{1,v}^* - u^* g_{1,v}^* \\ f_{2,u}^* - v^* g_{2,u}^* & f_{2,v}^* - g_2^* - v^* g_{2,v}^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{u} \\ \tilde{v} \end{pmatrix} =: A \begin{pmatrix} \tilde{u} \\ \tilde{v} \end{pmatrix}$$

となる. ただし, $f_{1,u}^* = \partial_u f_1(u^*, v^*)$, $f_{1,v}^* = \partial_v f_1(u^*, v^*)$, $f_{2,u}^* = \partial_u f_2(u^*, v^*)$, $f_{2,v}^* = \partial_v f_2(u^*, v^*)$, $g_{1,u}^* = \partial_u g_1(u^*, v^*)$, $g_{1,v}^* = \partial_v g_1(u^*, v^*)$, $g_{2,u}^* = \partial_u g_2(u^*, v^*)$, $g_{2,v}^* = \partial_v g_2(u^*, v^*)$, $g_1^* = g_1(u^*, v^*)$, $g_2^* = g_2(u^*, v^*)$ とする.

平衡解 (u^*, v^*) の (2) における線形安定性は行列 $A = (A_{ij})_{i,j=1,2}$ の固有値の実部によって以下のように判定できることが知られている.

1. A のすべての固有値の実部が負のとき, 平衡解 (u^*, v^*) は線形安定.
2. A の固有値で実部が正のものがあるとき, 平衡解 (u^*, v^*) は不安定.

1. の場合が成り立つ条件は A の固有方程式, 即ち 2 次方程式のすべての解の実部が負になる条件なので,

$$\text{tr} A < 0 \tag{6}$$

$$\det A > 0 \tag{7}$$

であることが分かる.

また, (2) の平衡解 (u^*, v^*) が線形安定であるとし, (1) を平衡解 (u^*, v^*) のまわりで線形化した方程式系に対して,

$$(\tilde{u}, \tilde{v}) = (c_1 \exp(\omega_\kappa t + i\kappa x), c_2 \exp(\omega_\kappa t + i\kappa x))$$

という形の解を考えると

$$\omega_\kappa \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} - D_u \kappa^2 & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} - D_v \kappa^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} =: \hat{A} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

が得られる. これより, ω_κ は $\hat{A}$ の固有値であり, κ に対応する空間的振動を表す. ω_κ の実部が正となるものがあれば, 平衡解 (u^*, v^*) が (2) において線形安定であっても不安定化することを意味している. この現象は Turing 不安定化と呼ばれる. ここで,

$$\operatorname{tr} \hat{A} = \operatorname{tr} A - \kappa^2 (D_u + D_v), \quad D_u, D_v > 0$$

であり, 平衡解 (u^*, v^*) は (2) において線形安定であるので $\operatorname{tr} A < 0$ であることから, $\operatorname{tr} \hat{A} < 0$ となり, Turing 不安定化が起きる条件は $\det \hat{A} < 0$ を満たす κ が存在することであると分かる. さらに, このような κ が存在する条件は, $\sigma := D_u/D_v$ として,

$$\begin{aligned} \det \hat{A} &= D_u D_v \kappa^4 - (A_{22} D_u + A_{11} D_v) \kappa^2 + \det A \\ &= \sigma (D_v)^2 \left(\kappa^2 - \frac{A_{22} \sigma + A_{11}}{2 \sigma D_v} \right)^2 + \frac{4 \sigma \det A - (A_{22} \sigma + A_{11})^2}{4 \sigma} \end{aligned}$$

となることから, $\sigma > 0$ より,

$$4 \sigma \det A - (A_{22} \sigma + A_{11})^2 < 0$$

であり, Turing 不安定化が起きるか否かは拡散定数の比 σ が重要になっていることが分かる.

3.2 (3) の平衡解の線形安定性について

この小節で述べる内容は [4] で報告されているものである. (4) に対応する常差分方程式系 (3) を平衡解 (u^*, v^*) のまわりで線形化した方程式系は,

$$\begin{cases} \tilde{u}^{s+1} = \frac{1 + \delta (f_{1,u}^* - u^* g_{1,u}^*)}{1 + \delta g_1^*} \tilde{u}^s + \frac{\delta (f_{1,v}^* - u^* g_{1,v}^*)}{1 + \delta g_1^*} \tilde{v}^{s+1} \\ \tilde{v}^{s+1} = \frac{\delta (f_{2,u}^* - v^* g_{2,u}^*)}{1 + \delta g_2^*} \tilde{u}^s + \frac{1 + \delta (f_{2,v}^* - v^* g_{2,v}^*)}{1 + \delta g_2^*} \tilde{v}^s \end{cases}$$

であり, 右辺の係数行列を $\{\tilde{B}_{ij}\}_{i,j=1,2}$ とすると,

$$\begin{pmatrix} \tilde{u}^{s+1} \\ \tilde{v}^{s+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{B}_{11} + \tilde{B}_{12} \tilde{B}_{21} & \tilde{B}_{12} \tilde{B}_{22} \\ \tilde{B}_{21} & \tilde{B}_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{u}^s \\ \tilde{v}^s \end{pmatrix} =: B \begin{pmatrix} \tilde{u}^s \\ \tilde{v}^s \end{pmatrix}$$

が得られる. また, 線形化を行う際に平衡解 (u^*, v^*) が満たす関係式を用いている.

平衡解 (u^*, v^*) の (3) における線形安定性は微分方程式の場合と同じように行列 $B = (B_{ij})_{i,j=1,2}$ の固有値で判定できるが, 差分方程式の場合は固有値の絶対値によって以下のように判定できることが知られている.

1. B のすべての固有値の絶対値が 1 より小さいとき, 平衡解 (u^*, v^*) は線形安定.
2. B の固有値で絶対値が 1 より大きいものがあるとき, 平衡解 (u^*, v^*) は不安定.

1. の場合が成り立つ条件は B の固有方程式即ち 2 次方程式のすべての解の絶対値が 1 より小さくなる条件なので,

$$1 + \operatorname{tr} B + \det B > 0 \quad (8)$$

$$1 - \operatorname{tr} B + \det B > 0 \quad (9)$$

$$\det B < 1 \quad (10)$$

であることが分かる. (8) と (9) の 2 つの条件は $\operatorname{tr} B$ の符号によって一方が他方に包含されてしまう条件であることを注意しておく.

さらに, (2) の平衡解 (u^*, v^*) の線形安定性の条件と (3) のそれとの対応については,

$$\begin{aligned} 1 - \operatorname{tr} B + \det B &= \frac{\delta^2 \det A}{(1 + \delta g_1^*)(1 + \delta g_2^*)} \\ 1 - \det B &= \frac{-\delta \operatorname{tr} A + \delta^2 \{g_1^* g_2^* - (f_{1,u}^* - u^* g_{1,u}^*)(f_{2,v}^* - v^* g_{2,v}^*)\}}{(1 + \delta g_1^*)(1 + \delta g_2^*)} \end{aligned}$$

となることと $(1 + \delta g_1^*)(1 + \delta g_2^*) > 0$ から, (9) は (7) と一致しており, (10) は差分刻み δ が小さくなるほど (6) と近い条件となる. また, 差分刻み δ が十分小さいとき $\operatorname{tr} B > 0$ となり, (9) を判定するだけで十分である.

3.3 (4) の平衡解の Turing 不安定性について

最後に (3) の平衡解 (u^*, v^*) が線形安定であるとし, Turing 不安定性について考える. (4) を平衡解 (u^*, v^*) のまわりで線形化した方程式系に対して,

$$(\tilde{u}_n^s, \tilde{v}_n^s) = (c_1 (\lambda_\kappa)^s \exp(i\kappa n), c_2 (\lambda_\kappa)^s \exp(i\kappa n))$$

という形の解を考えると

$$\lambda_\kappa \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_{11} \frac{a+2\cos\kappa}{a+2} & B_{12} \frac{b+2\cos\kappa}{b+2} \\ B_{21} \frac{a+2\cos\kappa}{a+2} & B_{22} \frac{b+2\cos\kappa}{b+2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} =: \hat{B} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

が得られる. 3.1 節と同じように λ_κ は $\hat{B}$ の固有値であり, その絶対値が 1 より大きいものがあれば, 平衡解 (u^*, v^*) が (3) において線形安定であっても不安定化することを意味している.

$$\det \hat{B} = \frac{(a+2\cos\kappa)(b+2\cos\kappa)}{(a+2)(b+2)} \det B, \quad -1 < \frac{(a+2\cos\kappa)(b+2\cos\kappa)}{(a+2)(b+2)} < 1$$

であり, 平衡解 (u^*, v^*) は (3) において線形安定だったので $\det B < 1$ であることから $\det \hat{B} < 1$ となる. したがって, Turing 不安定化が起きる条件は $1 + \operatorname{tr} \hat{B} + \det \hat{B} < 0$ または $1 - \operatorname{tr} \hat{B} + \det \hat{B} < 0$ を満たす κ が存在することであると分かる.

さらに, (1) の平衡解 (u^*, v^*) の Turing 不安定性の条件と (4) のそれとの対応については,

$$\alpha := \frac{1}{a+2}, \quad \beta := \frac{1}{b+2}, \quad \eta := \sin^2 \frac{\kappa}{2}$$

とすると,

$$1 - \text{tr} \hat{B} + \det \hat{B} = \frac{16\alpha\beta \{1 + \delta (f_{1,u}^* - u^* g_{1,u}^*)\} \{1 + \delta (f_{2,v}^* - v^* g_{2,v}^*)\}}{(1 + \delta g_1^*)(1 + \delta g_2^*)} \eta^2 \\ + \frac{-4\delta (\alpha A_{22} + \beta A_{11}) + 4\delta^2 F}{(1 + \delta g_1^*)(1 + \delta g_2^*)} \eta + \frac{\delta^2 \det A}{(1 + \delta g_1^*)(1 + \delta g_2^*)}$$

となる. ただし,

$$F := \alpha \{ (f_{1,v}^* - u^* g_{1,v}^*) (f_{2,u}^* - v^* g_{2,u}^*) - (f_{1,u}^* - u^* g_{1,u}^*) (f_{2,v}^* - v^* g_{2,v}^*) \} \\ - \beta (f_{2,v}^* - v^* g_{2,v}^*) (f_{1,u}^* - u^* g_{1,u}^*)$$

である. $1 - \text{tr} \hat{B} + \det \hat{B}$ は η の 2 次式であり, 差分刻み δ を 0 に近づけると η の 1 次の係数は符号を負に保ちつつ 0 に近づく. $0 \leq \eta \leq 1$ の範囲で負になるような κ が存在すれば Turing 不安定化が起きるので, δ が十分小さいときに次の条件:

$$\left\{ \frac{-2\delta (\alpha A_{22} + \beta A_{11}) + 2\delta^2 F}{(1 + \delta g_1^*)(1 + \delta g_2^*)} \right\}^2 \\ - \frac{16\delta^2 \alpha \beta \det A \{1 + \delta (f_{1,u}^* - u^* g_{1,u}^*)\} \{1 + \delta (f_{2,v}^* - v^* g_{2,v}^*)\}}{(1 + \delta g_1^*)^2 (1 + \delta g_2^*)^2} > 0$$

を満たせば Turing 不安定化が起きることが分かる. さらに, $\alpha/\beta = \sigma (= D_u/D_v)$ に注意すると, 差分刻み δ が小さくなるほどこの条件は (1) の平衡解 (u^*, v^*) に Turing 不安定性が起きる条件に近い条件となる. また, 差分刻み δ が十分小さいとき $1 + \text{tr} \hat{B} + \det \hat{B} > 0$ となり, $1 - \text{tr} \hat{B} + \det \hat{B} < 0$ のみを判定するだけで十分である.

4 最後に

本稿では反応項が有理式である反応拡散系に対応する常微分方程式系の離散化を用いることで反応拡散系の減算のない離散化を与えた. 今回の離散化で得られた偏差分方程式系は元の反応拡散系と同じ平衡解をもち, それぞれの平衡解の安定性について考察し, Turing 不安定になる条件について比較した. その結果, 差分刻みを十分小さくすることで離散化で得られた偏差分方程式系の Turing 不安定性が生じる条件が元の反応拡散系のそれに近づくことが分かった.

今後は, 本稿で与えた離散化とその安定性についての議論を具体的な反応拡散系の数値計算にも応用していきたい. また, 本稿では直接扱っていないが, 本稿で与えた離散化で得られた偏差分方程式系は超離散化を行うことができる. 元の反応拡散系とその離散化で得られる方程式系の解の安定性が超離散化後の方程式系の解の性質とどのように対応しているかについても調べていきたい.

参考文献

- [1] T. Tokihiro, D. Takahashi, J. Matsukidaira, and J. Satsuma, From soliton equations to integrable cellular automata through a limiting procedure *Phys. Rev. Lett.* **76** (1996), 3247–3250.
- [2] 広田 良吾, 高橋 大輔, 『差分と超離散』共立出版, (2003)
- [3] D. Takahashi and J. Matsukidaira, Box and ball system with a carrier and ultradiscrete modified KdV equation *J. Phys. A*, **30** (1997), L733.
- [4] Murray E. Alexander and Seyed M. Moghadas, $\mathcal{O}(\ell)$ shift in Hopf bifurcations for a class of non-standard numerical schemes *2004 Conference on Diff. Eqns. and Appl. in Math. Biology*, **Conference 12** (2005), 9–19.
- [5] K. Matsuya and M. Murata, Spatial pattern of discrete and ultradiscrete Gray-Scott model, *Discrete Continuous Dyn. Syst. Ser. B*, **20** (2015), 173–187.
- [6] 松家 敬介, 離散 Gray-Scott モデルの時空パターンと平衡解の Turing 不安定性, 武蔵野大学数理工学センター紀要, **3** (2018), 53–64.

(原稿提出: 2019 年 1 月 8 日; 修正稿提出: 2019 年 2 月 15 日)