

Characterization of clusters in a system of self-driven particles

メタデータ	言語: jpn 出版者: 公開日: 2017-06-13 キーワード (Ja): キーワード (En): 作成者: 谷村, 優太, 友枝, 明保, 木下, 修一, 矢崎, 成俊 メールアドレス: 所属:
URL	https://mu.repo.nii.ac.jp/records/541

自己駆動粒子モデルにおける「群れ」の特徴付け

Characterization of clusters in a system of self-driven particles

谷村 優太¹

Yuta Tanimura

友枝 明保²

Akiyasu Tomoeda

木下 修一³

Shu-ichi Kinoshita

矢崎 成俊⁴

Shigetoshi Yazaki

1 はじめに

昆虫や魚，鳥など自然界で棲息している生物の中には「群れ」を形成するものがある。それぞれの生活環境は地上や水中，空中など様々であるが，自発的に運動する個体が集団となったときに観察される運動形態という点で，共通した現象と捉えることができる。ここで「群れ」とは，定性的に次の二つの性質を示す運動形態と言える。

- ある個体の近傍に一定の個体数がある
- 移動時には各個体の進行方向が揃っている

「群れ」には秩序だった様々な形態が存在しており，そのメカニズムは「生物特有の高度な情報処理や複雑な相互作用に由来する」，あるいは「群れの中にリーダーとなる個体があって，その指揮のもとで実現されている」などと考えることもできるが，1987年，Raynoldsによって提案された Boids モデルによると，生物の群れ行動は三つの簡単な規則（結集，分離，整列）だけで再現できることが示されている [1]。また，自発的に運動できる個体は「自己駆動粒子 (Self-Driven Particle)」と呼ばれ，近年の自己駆動粒子の集団運動に関する数理研究の発展により，単純な相互作用 [1, 2] やリーダーの不在 [3] といった仮定に基づく数理モデルで「群れ」のような振る舞いを再現できることも分かってきている。実際，真鯛の群れには決まったリーダーがいるようには見えないが，多くの個体がお互いにぶつかることなく泳いでおり，明確なふちを持った塊のような非常に密な「群れ」の形成も観察されている (Fig. 1.1)。

¹ 明治大学大学院理工学研究科基礎理工学専攻数学系

² 武蔵野大学工学部数理工学科

³ 武蔵野大学工学部数理工学科

⁴ 明治大学理工学部数学科

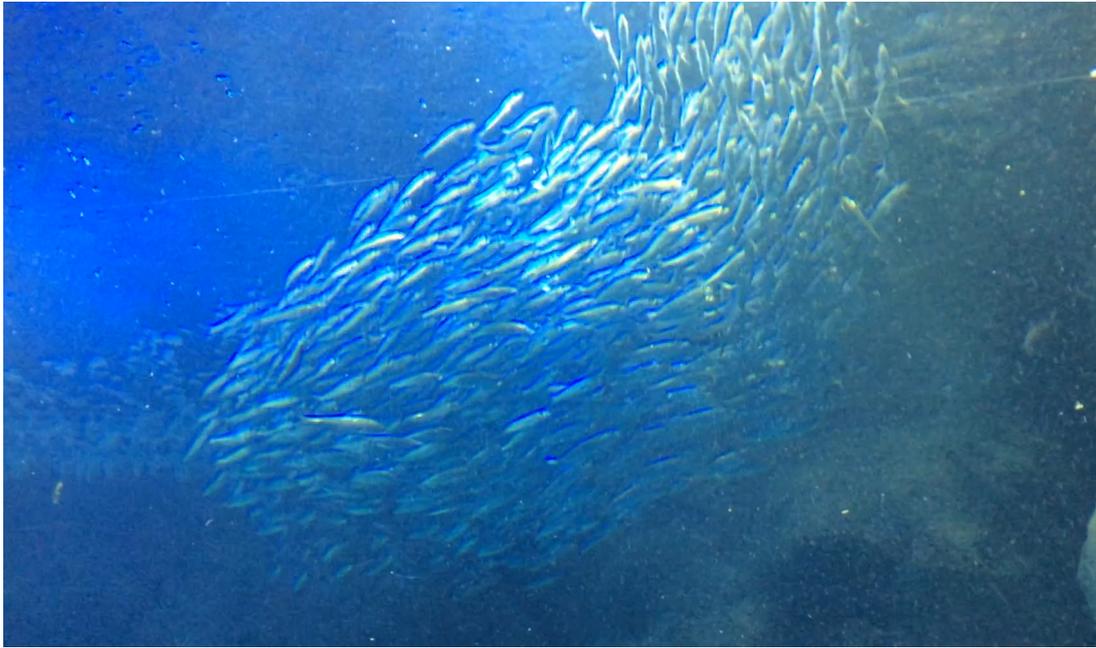


Fig. 1.1 真鯛の群れ (新潟市水族館マリニピア日本海にて筆者撮影 (2015.8.11))

Tamás Vicsek らは 1995 年に 2 次元平面内で大きさを考えない複数の自己駆動粒子が相互作用する数理モデルを提案し, その数理モデル解析において粒子の向きの揃い具合を表す秩序変数を導入することで, 「群れ」のような集団運動が生まれることを明らかにした [2]. しかし, Vicsek らが導入した秩序変数では全体としての向きしか見ておらず, 単純な相互作用によってどのような「群れ」が形成されているかということを見ることはできていない.

本稿では, 集団運動の詳細な理解へ向けた最初の理論的取り組みとして, 粒子数と秩序変数を用いて「群れ」の特徴付けを統計的観点から提示することで, 数値シミュレーションを通じて次のような主結果を得た.

1. Vicsek らが導入した秩序変数が同じような値であっても粒子の動きは異なる.
2. 「群れ」を定性的に定義し, 判定法を導入することによって「群れ」の数や方向がわかる.

次章以降の構成は次の通りである. 2 章では Vicsek が提唱した 2 次元の集団運動モデル [2] を紹介する. 3 章では群れの数理的定義, および方向の識別を行う判定法を導入することにより, [2] での「群れ」に対して数理的特徴付けを行い, それらのまとめと今後の課題について 4 章で述べる.

2 Vicsek らによる 2 次元の集団運動モデル

上述した Vicsek らが提案した数理モデル [2] を本稿では「Vicsek モデル」と呼ぶことにする. 本章では Vicsek モデルの骨子を説明する. また, [2] で扱われなかったパラメータの範囲

も含めた粒子の振る舞いについての追試シミュレーションについては付録 A を参照されたい。

2.1 モデルの説明

Vicsek モデルでは粒子の大きさを考えていないため、粒子同士の衝突は無いものと仮定する。総粒子数を N として、第 i 粒子の運動を次の 2 つの方程式で与える ($i = 1, 2, \dots, N$)。

Vicsek モデル

$$\mathbf{X}_i(t + \Delta t) = \mathbf{X}_i(t) + v \mathbf{e}_{\theta_i(t + \Delta t)} \quad (2.1)$$

$$\theta_i(t + \Delta t) = \langle\langle \theta(t) \rangle\rangle_r + \Delta\theta_i \quad (2.2)$$

(2.1) は第 i 粒子の位置 \mathbf{X}_i の変化を表す方程式で、 $\Delta t > 0$ は時間増分、 v は粒子の速度、 $\mathbf{e}_{\theta_i(t + \Delta t)}$ は $\theta_i(t + \Delta t)$ 方向の単位ベクトルを表す。(2.2) は第 i 粒子の向き θ_i の変化を表した方程式で、 $\langle\langle \cdot \rangle\rangle_r$ は第 i 粒子を中心とする半径 r の円内の粒子に対するある種の平均を表し、

$$\langle\langle \theta(t) \rangle\rangle_r = \arctan \frac{\langle \sin \theta(t) \rangle_r}{\langle \cos \theta(t) \rangle_r}$$

と定義する (C 言語では $\langle\langle \theta(t) \rangle\rangle_r = \text{atan2}(\langle \sin \theta(t) \rangle_r, \langle \cos \theta(t) \rangle_r)$ に相当する。詳しくは付録 B を参照されたい)。また、 $\Delta\theta_i$ は与えられたパラメータ $\eta > 0$ に対して区間 $[-\eta/2, \eta/2]$ 上に一様分布するホワイトノイズをそれぞれ表している (Fig. 2.1)。ただし、 $\langle \cdot \rangle_r$ は第 i 粒子を中心とする半径 r の円内の粒子に対する相加平均を表す。さらに、 \mathbf{X}_i の r 近傍にある N_i 個の粒子の番号の集合を J_i とするとき、

$$N_i = \#J_i, \quad J_i = \{j \in \{1, 2, \dots, N\} \mid |\mathbf{X}_j - \mathbf{X}_i| \leq r\}$$

であり、これより

$$\langle \cos \theta(t) \rangle_r = \frac{1}{N_i} \sum_{j \in J_i} \cos \theta_j(t), \quad \langle \sin \theta(t) \rangle_r = \frac{1}{N_i} \sum_{j \in J_i} \sin \theta_j(t)$$

と定める (Fig. 2.2)。

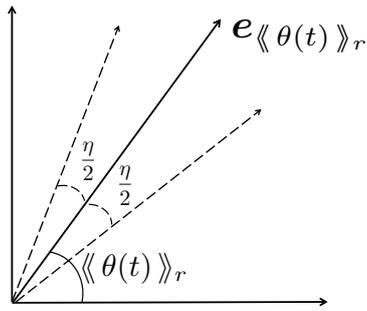


Fig. 2.1 $\langle\langle\theta(t)\rangle\rangle_r$ に対するノイズの影響

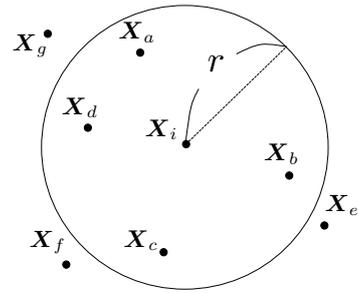


Fig. 2.2 X_i の r 近傍の例. このとき, $J_i = \{a, b, c, d, i\}$ であり, $N_i = \#J_i = 5$ となる.

以上が Vicsek モデルであり, このモデルの特徴は次のようにまとめられる.

- (1) 各粒子は一定の速さ v で毎時間ステップ移動する.
- (2) ノイズに影響されつつ, 各粒子は自分を中心とした半径 r の円内にある他のすべての粒子の平均の向きに揃えようとする.

2.2 Vicsek らの結果

Vicsek らは (2.1), (2.2) で表される Vicsek モデルに従い, Fig. 2.3 のようなパラメータのもとで, 方向についてのノイズ強度 η と領域サイズ L の大きさを変えたシミュレーションを行った. Fig. 2.3 と Fig. 2.4 にその結果を記載する. ここで, 小さな矢印は粒子の向きを表している.

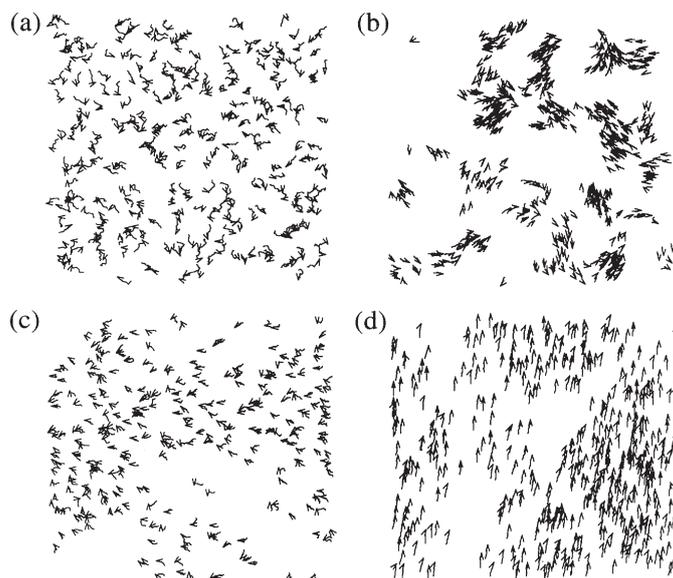


Fig. 2.3 Vicsek [2] の FIG. 1 を引用. 粒子数 $N = 300$, 速度 $v = 0.03$, 相互作用半径 $r = 1$, 時間増分 $\Delta t = 1$ でのシミュレーション. 小さな矢印は粒子の向きを表しており, 密度とノイズを変化させることで複数の特徴的な運動形態が見られる. (a) 初期配置 ($t = 0$), $L = 7$: 粒子の位置, 向きはランダムに決定する. (b)-(d) 時間発展後のスナップショット. (b) $L = 25, \eta = 0.1$: 粒子はランダムな方向に動くいくつかのグループを形成する傾向がある. (c) $L = 7, \eta = 2.0$: 粒子は何らかの相関を持ってランダムに動く. (d) $L = 5, \eta = 0.1$: すべての粒子が同じ方向に動く.

この結果から, 密度が低くノイズが大きい領域では粒子は全体としてバラバラに行動する. 密度が高くノイズが小さい領域ではやがて全系で向きの揃った状態が現れる. これは全体として向きが揃っていない無秩序状態から全体として向きが揃っている秩序状態への相転移現象と考えることができる. そこで, 次のような秩序変数を導入する.

秩序変数 (Order Parameter)

$$v_a(t) = \frac{1}{N} \sqrt{\left(\sum_{k=1}^N \cos \theta_k(t)\right)^2 + \left(\sum_{l=1}^N \sin \theta_l(t)\right)^2}$$

これは全体として向きが揃っているかを表す指標であり, もし全粒子の運動方向が完全に揃っていれば 1 となる. 一方, 粒子の運動方向がランダムであれば速度ベクトル同士が相殺されるので 0 に近づく.

Fig. 2.4 (a) は縦軸秩序変数 v_a , 横軸ノイズ η とし, v_a のノイズ η 依存性を表した図である. 粒子数, 領域サイズが大きくなるにつれて秩序変数 v_a の値の変化が鋭くなっていくことがわかり, 転移の存在が示唆されている. また, 秩序変数 v_a の密度依存性を調べた結果が Fig. 2.4 (b) であり, この結果はノイズのみならず密度に関しても転移の存在を示唆している.

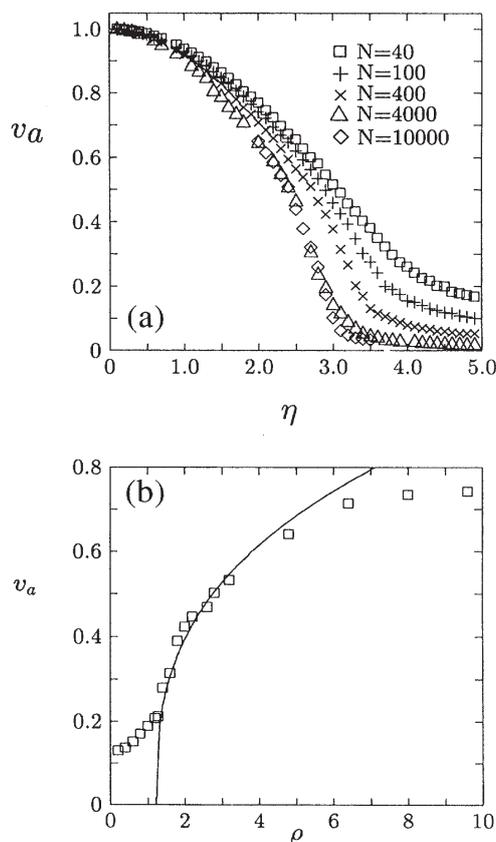


Fig. 2.4 Vicsek [2] の FIG. 2 を引用. (a) v_a のノイズ η 依存性. 様々な領域サイズと粒子数で密度を固定し, ノイズを徐々に減少させ, 秩序変数を用いて全体として向きが揃っていない状態から向きが揃っている状態への変化を観察したもの. (\square : $N = 40, L = 3.1$; $+$: $N = 100, L = 5$; \times : $N = 400, L = 10$; \triangle : $N = 4000, L = 31.6$; \diamond : $N = 10000, L = 50$.) (b) v_a の密度 ρ 依存性. 領域サイズ $L = 20$ とし, ノイズを固定したまま密度を増やしていったとき, 秩序変数がどのように変化するかを観察したもの.

3 局所的な秩序変数導入に基づく群れの定義と特徴付け

Vicsek モデル [2] で導入された秩序変数は全体の向きが揃っているかどうかの判定はできるが, 群れの数や向きまではわからない. そこで本章では, 1 章で述べた「ある個体の近傍に一定の個体数がある」, 「移動時には各個体の進行方向が揃っている」という 2 つの運動形態の定量的指標として群れの数と方向を判定する手続きを提案し, その手続きに基づいて群れの特徴付けを行う.

3.1 群れの特徴付けのアルゴリズム

本節では群れの定義と方向を識別する方法を提案し, 具体的な手順について述べる. ある時刻 t で, 領域 $[0, L] \times [0, L]$ を縦横それぞれ m 個の正方格子 $S_{i,j} (i, j = 0, 1, \dots, m-1)$ に等

分割し (Fig. 3.1), 正方格子 $S_{i,j}$ 中の粒子数を $N_{i,j}$ とする. また, 正方格子内の全粒子の向きが揃っているかを表す局所的な指標として $\varphi_{i,j}$ を導入し, 次のように定義する.

$$\varphi_{i,j} = \frac{1}{N_{i,j}} \sqrt{\left(\sum_{k=1}^{N_{i,j}} \cos \theta_k\right)^2 + \left(\sum_{l=1}^{N_{i,j}} \sin \theta_l\right)^2}$$

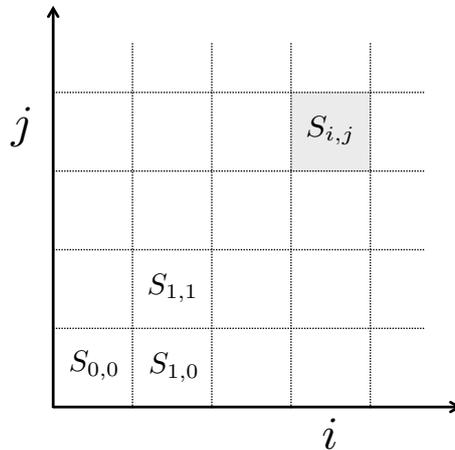


Fig. 3.1 正方格子 $S_{i,j}$

このとき, 閾値 N^*, φ^* に対して

$$N_{i,j} \geq N^* \tag{3.1}$$

$$\varphi_{i,j} \geq \varphi^* \tag{3.2}$$

という2つの条件を満たしているものを考え, 次の方法で群れを定義する.

群れの定義

(3.1),(3.2) を満たす全ての正方格子を取り出し, それらのうち隣接している正方格子をまとめて1つの群れとする.

さらに, 1つの群れの中で方向にどの程度ばらつきがあるかを判定するために次の方法を導入する.

方向の識別

1つの群れを形成する各正方格子内の粒子の平均方向の角度を色彩環を用いて色を塗る [5, 6](Fig. 3.2).

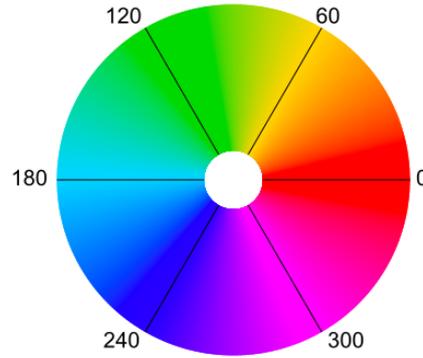


Fig. 3.2 方向色彩環. 角度の計算方法は $\langle \theta \rangle_r$ と同様に行う. 粒子の平均方向の角度が図の色彩環の色に対応する.

以上のことから, 群れを判別し, 方向を識別する具体的な手順をまとめると, 次のようになる.

- 1) 各正方格子 $S_{i,j}$ について $N_{i,j}$ と $\varphi_{i,j}$ の計算をし, (3.1),(3.2) を満たす正方格子にラベルとして 0 を割り当て, それ以外の正方格子には -1 を割り当てる ($i, j = 0, 1, \dots, m-1$).
- 2) ラベル 0 が割り当てられた正方格子について, 隣接する 8 マスのラベルを周期境界条件に気をつけながら確認し,
 - (a) 正のラベルが存在しないときは, 割り当てられていない最小の自然数を割り当てる.
 - (b) 正のラベルがただ 1 つ存在するときは, その値に変更する.
 - (c) 正のラベルが複数存在するときは, それらのうちの最小値 α に変更する.
- 3) 2-(c) の場合, 隣接した 8 マスのうち α より大きいラベルを見つけたら, 全領域においてそのラベルに等しいラベルはすべて α に変更する.
- 4) ラベルの最大値が群れの数であり, 正方形の色で粒子の向きがわかる.

次に閾値 φ^* と N^* を決定する. まず, φ^* は向きが揃っているかどうかを表す指標であり, 「群れ」は定性的に向きが揃っている必要があるため, ここでは $\varphi^* = 0.99$ と設定する. また, N^* についてはいくつかの検証を行って設定する. Fig. 3.3 (a) の状況について, $N^* = 2$ とすると群れの数 3, $N^* = 3$ とすると群れの数 1, $N^* = 4$ では群れの数 2 となる. さらに, Fig. 3.3 (b) の状況では $N^* = 2$ とすると群れの数 3, $N^* = 3$ とすると群れの数 2, $N^* = 4$ では群れの数 3 となる. N^* が小さいと少ない粒子でも群れと判断されてしまい, N^* が大きいと 1 つの群れに見えても密でない部分が除かれてしまう. 以上の検証から, 本稿では $N^* = 3$ を採用する.

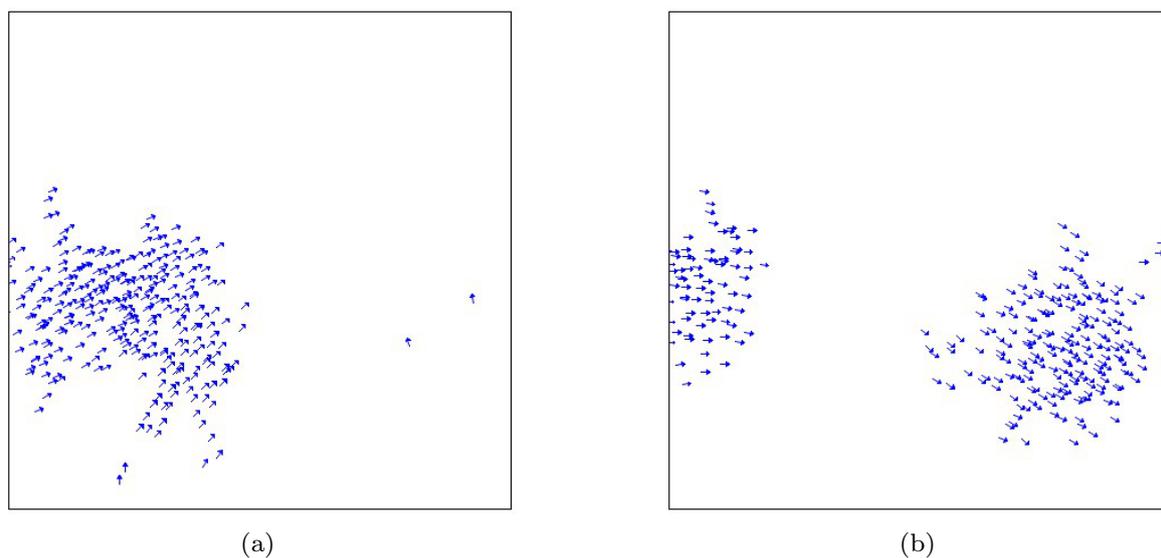


Fig. 3.3 群れの数进行カウントするための例図. 両図は $L = 25, \eta = 0.1$ で, 異なる初期配置から始めた $t = 3000$ のときのスナップショットである.

3.2 群れの特徴付けの結果

密度が高く, ノイズが小さいため全ての粒子が決まった方向に動いているもの (Fig. 2.3 (c)) と, 密度は高いがノイズが大きいため全体として向きが揃っていないもの (Fig. 2.3 (d)) について視覚化したものが Fig. 3.4 と Fig. 3.5 である. どちらも $t = 3000$ のときのもので, 密度が大きくノイズが小さいときは1つの群れを形成しており, ノイズが大きくなると群れは形成されていないことがわかる.

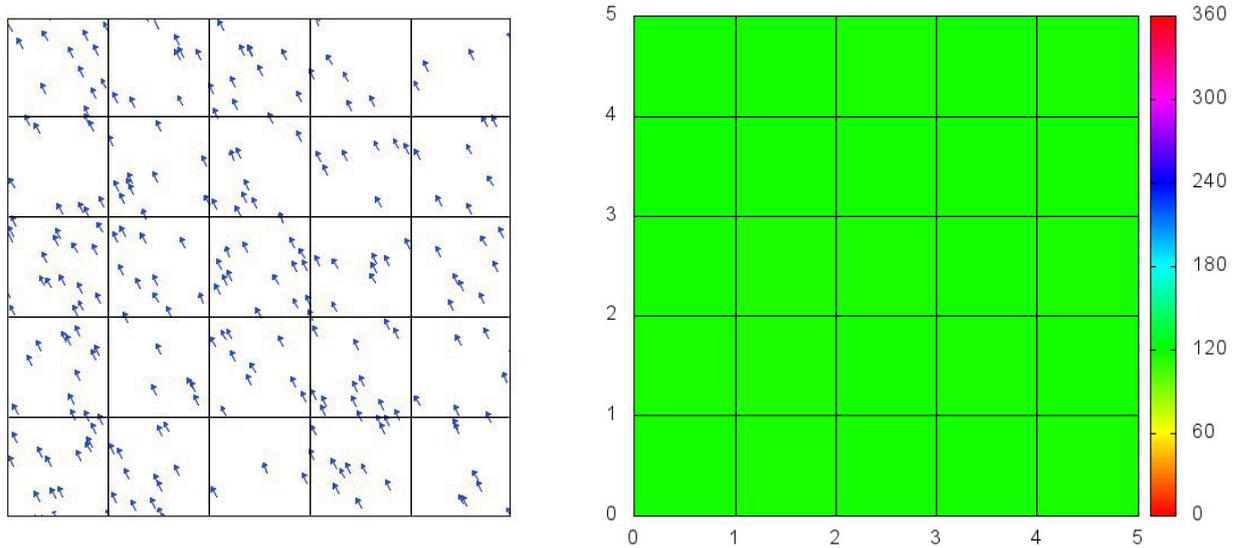


Fig. 3.4 $t = 3000, L = 5, \eta = 0.1$: 密度が高く, ノイズが小さいとき, 全ての正方格子に同じ色が塗られており, 向きが揃っていることがわかる. これは1つの群れとみなせる.

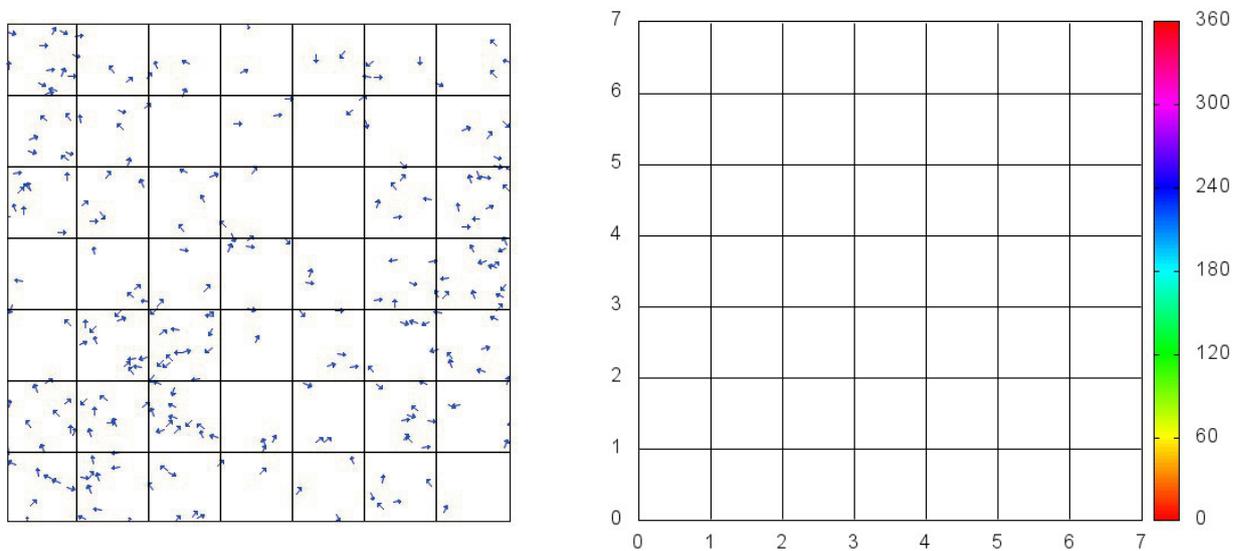


Fig. 3.5 $t = 3000, L = 7, \eta = 4.0$: 密度が高く, ノイズが大きくなると色の塗られる正方格子がなくなり, 群れの数も0となる. 正方格子の中に粒子が多く存在する場合でも, 向きが揃っていないため群れとは判別されていないため色が塗られていない.

一方, 密度が低く, ノイズが小さいとき (Fig. 2.3 (b)) は Vicsek の論文 [2] では, 「このとき粒子はランダムな方向に動く複数のグループを形成する傾向がある」, と定性的に表現しているが, その「傾向」を視覚化した図が Fig. 3.6 である. Fig. 3.6 (a)-(d) の初期配置はすべて異なり, 共通の領域サイズとノイズでの $t = 3000$ におけるスナップショットであり, 様々な群れのパターンが出現する. 隣接している正方格子の塊 (1つの群れ) と近くにある正方格子は同じ色 (あるいは非常に近い色) と判定されていることから, 向きが揃っている (あるいは

非常に近い向きである) ことがわかる. これはシミュレーションの経験から, (1) 粒子の影響半径と正方格子の 1 辺の長さが等しい ($r = 1$) ので, 1 つの正方格子内の粒子の影響範囲はほぼ周囲 8 マスの正方格子に及ぶ, (2) 群れと判定されていない隠れた粒子を仲介して影響範囲が広がる, (3) 1 つの群れが分裂した直後である, などが主たる要因と考えられる.

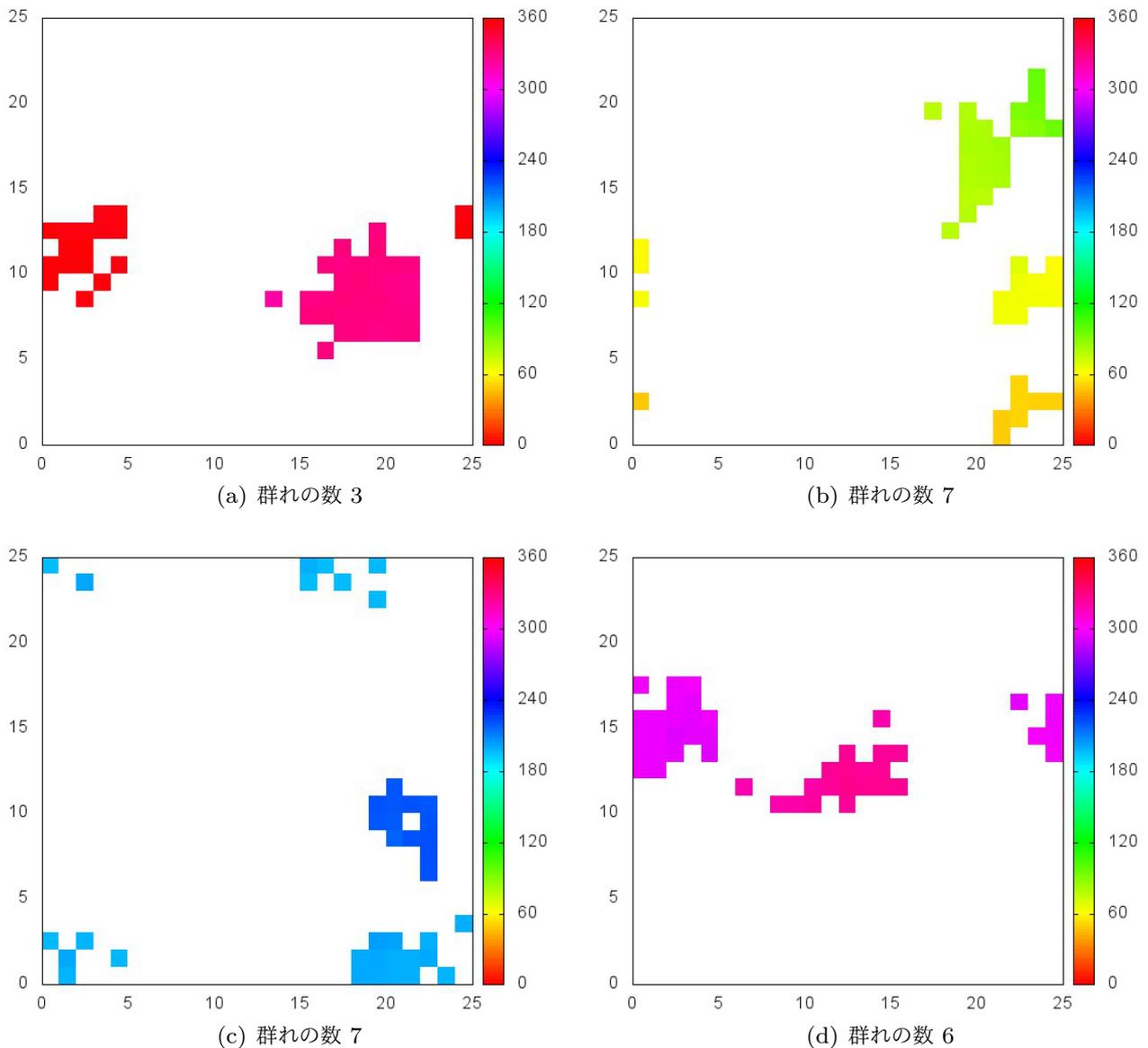


Fig. 3.6 Fig. 2.3 (b) と同じパラメータ ($L = 25, \eta = 0.1$) のもとで異なる初期配置から始めた $t = 3000$ における群れのパターン. 密度が低く, ノイズが小さいとき, 粒子はランダムな向きのいくつかの群れを形成する傾向がある.

Fig. 3.4 と Fig. 3.6 の秩序変数の値はともに Fig. A.3 (c) と (a) より, $v_a \approx 1$ で区別はつかないが, 粒子全体は極めて異なる様相を呈している. 秩序変数 v_a だけでは表現できなかった群れの様相を, 本稿で提案した判定法により, 群れの個数という指標で定量的に評価することが可能となった.

群れの個数について、縦軸出現頻度、横軸群れの数とし、密度 $\rho = 0.1, 0.5, 1.5$ としたときの群れの数の分布を表すヒストグラムが Fig. 3.7 である。群れの数にはある種の代表的な値があり、分布は密度によって変化している。 $\rho = 0.1$ のとき、群れの数の平均値は 1.95 で、分散は 1.04 である。これは密度が小さいときは群れの数は少なく、あまりばらついていないことを意味している。次に $\rho = 0.5$ のとき、群れの数の平均値は 4.46 で、分散は 6.52 である。これは密度が高くなるにつれて、群れの数は増え、ばらつきが大きくなることを意味している。そしてさらに密度が高い $\rho = 1.5$ のとき、群れの数の平均値は 2.76 で、分散は 2.35 である。これは密度がさらに高くなることで、群れの数が減ることを意味している。これはシステムサイズが有限であるため、粒子数が多いとすべてが 1 つの群れとみなされるからであると考えられる。この結果は、有限領域において多数の群れが存在できる最適密度の存在を示唆している。

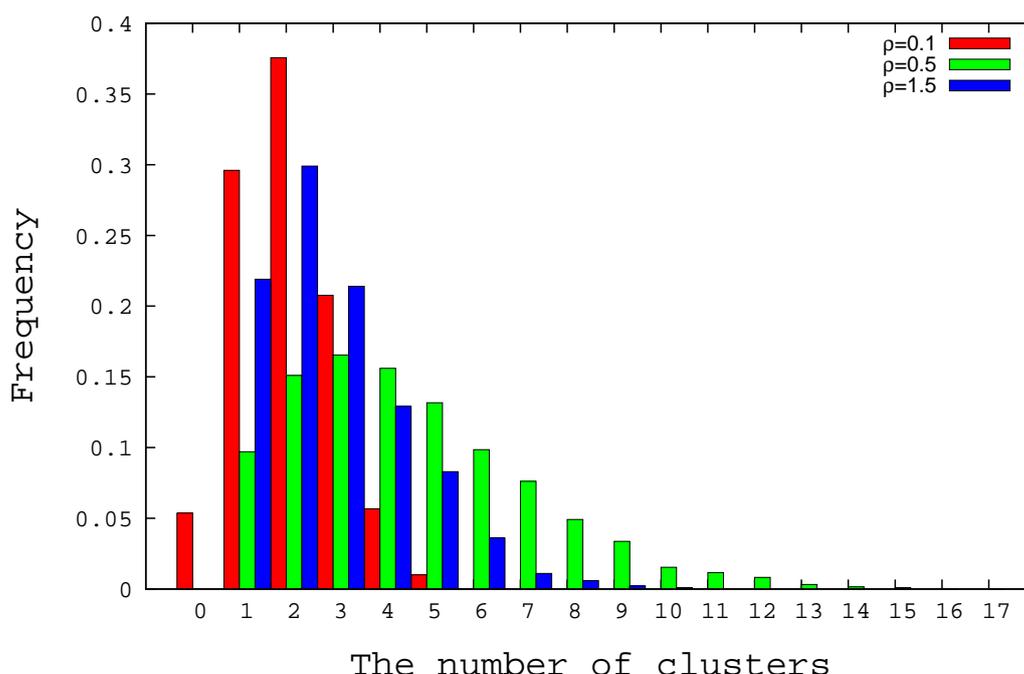


Fig. 3.7 縦軸を出現頻度、横軸を群れの数とし、 $t = 3000$ のときの密度による群れの数の分布を表したヒストグラム。 $\rho = 0.1$ のときは $L = 25, N = 63$ であり、 $\rho = 0.5$ のときは $L = 25, N = 300$ 、 $\rho = 1.5$ のときは $L = 25, N = 938$ である。

4 まとめと今後の課題

本稿では自己駆動粒子が一定の速度で動く Vicsek モデル [2] の数値シミュレーションを行い、その集団運動が密度 $\rho = N/L^2$ とノイズ η によってどのような性質を持っているかについて追試を行った。本計算で得られた結果は Vicsek [2] の実験結果と定性的に一致しており、密度が高く、ノイズが小さいほど粒子は全体として向きが揃い、密度が低く、ノイズが大きいほど全体として向きがランダムになることがわかった。また、局所的な秩序変数の導入による群れの定義を行い、[2] の秩序変数だけでは見ることのできなかつた群れの様相に対して、群れの数や粒子の向きについての定量的な判定法を導入した。群れの数は密度によって分布が異なり、有限領域では密度に関して群れの数は上限があることがわかった。

本稿で提示した判定法は正方格子のサイズ、影響半径、および閾値 N^* に依存している。直観的に群れとは、近視では離散的で、遠視では塊に見えるものであるが、一方で、正方格子のサイズと影響半径の比はしかるべき無次元量としての評価が期待できる。すなわち、本判定法が依存している諸量の間におけるスケール不変性とスケール依存性の峻別を探究することは重要な視点であろう。さらに、群れの数と領域サイズとの関係を調べるために群れの大きさや群れ同士の距離についての一般的な指標も定式化する必要がある。また、群れの数の分布に変化があるということは群れの統合や分裂が起きていることが示唆され、それらの定量的な検証も今後の課題である。

謝辞

本稿執筆にあたり、科学研究費補助金 (No.16H03953 (矢崎), No.25790099 (友枝)) の援助を受けました。また、数値計算には、文部科学省共同利用・共同研究拠点明治大学先端数理科学インスティテュート「現象数理学研究拠点」の共同利用計算機設備、および宮部賢志氏 (明治大学理工学部数学科) 管理下のコンピュータを利用しました。ここに謝意を表します。

参考文献

- [1] C. Reynolds, “Flocks, herds, and schools: A distributed behavioral model”, *Comput. Graph.*, 21 (1987), pp.25–34.
- [2] T. Vicsek, A. Czirók, E. Ben-Jacob, I. Cohen, and O. Shochet, “Novel Type of Phase Transition in a System of Self-Driven Particles”, *Phys. Rev. Lett.*, 75 (1995), pp.1226–1229.
- [3] G. Grégoire, H. Chaté, and Y. Tu, “Moving and staying together without a leader”, *Physica D*, 181 (2003), pp.157–170.
- [4] 西口 大貴, 佐野 雅己, 『「自己駆動粒子の集団運動」群れから始まる非平衡統計力学』, 「特集・数理モデルと普遍性」, *数理科学*, 631 (2016.1), pp.39–44.
- [5] 平岡 喬之, 「自己駆動粒子系の動力学：群集運動を中心に」, ワーキングペーパーシリーズ人工社会研究
- [6] 平岡 喬之, 島田 尚, 伊藤 伸泰, 「目的地を持たない歩行者の集団運動」, 交通流数理研究会 2013 年シンポジウム

付録A 追試シミュレーション

Vicsek モデル [2] で扱われなかったパラメータの範囲も含めた粒子の振る舞いについて追試シミュレーションの結果を記載する。

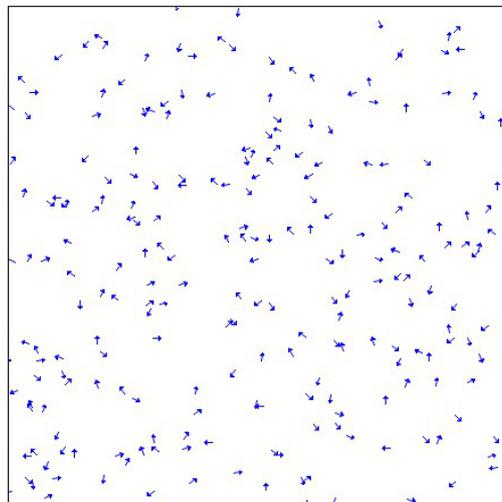
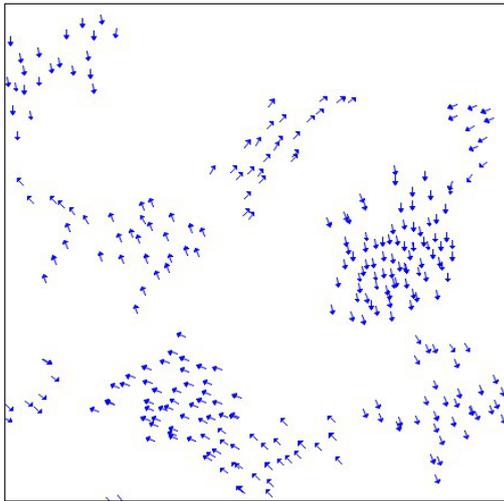
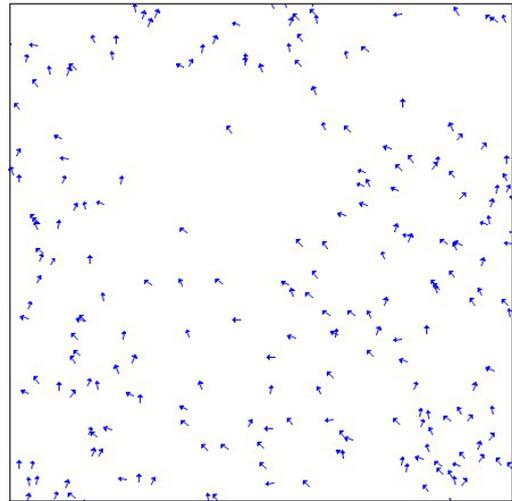


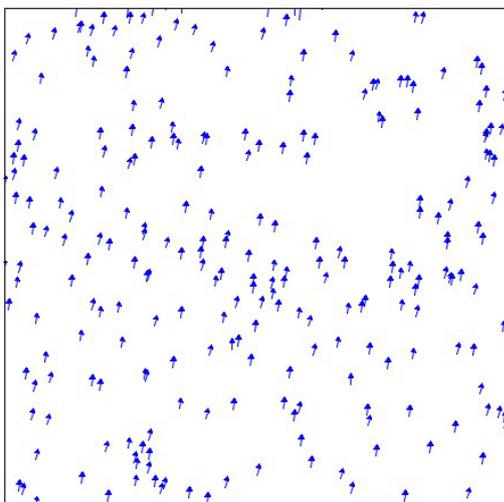
Fig. A.1 本稿のシミュレーションにおける $L = 7$ のときの初期配置 ($t = 0$)。粒子の位置, 向きはランダムに決定する。



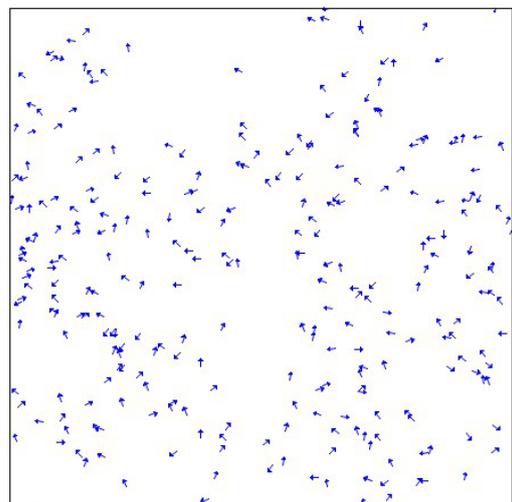
(a) $L = 25, \eta = 0.1$



(b) $L = 7, \eta = 2.0$



(c) $L = 5, \eta = 0.1$



(d) $L = 7, \eta = 4.0$

Fig. A.2 (a)-(d) は L と η の各値に対して、ある程度時間が経過したとき ($t = 1000$) のスナップショット. (a)-(d) で共通のパラメーターは総粒子数 $N = 300$, 粒子の速度 $v = 0.03$, 相互作用半径 $r = 1$, 時間増分 $\Delta t = 1$ である. (a) $L = 25, \eta = 0.1$: 密度が低くノイズが小さいとき, 粒子はランダムな方向に動くいくつかの「群れ」のようなものを形成する振る舞いを示す. (b) $L = 7, \eta = 2.0$: 密度が高くノイズが少し大きくなると全ての粒子はある決まった方向に動くが, その方向は変わることがある. (c) $L = 5, \eta = 0.1$: より高い密度でノイズが小さいと全ての粒子はある決まった方向に動く. (d) $L = 7, \eta = 4.0$: 密度は高いがノイズが大きすぎるので全体として向きが揃っていないように見える.

Fig. A.2 はそれぞれのパラメータについて定常状態だと思われる離散時間 t を確認するため, 秩序変数 v_a を用いて Fig. A.2 (a)-(d) について, 横軸離散時間 t , 縦軸秩序変数 v_a としてプロットをした結果である. この秩序変数の時間変化は [2] では扱われていない.

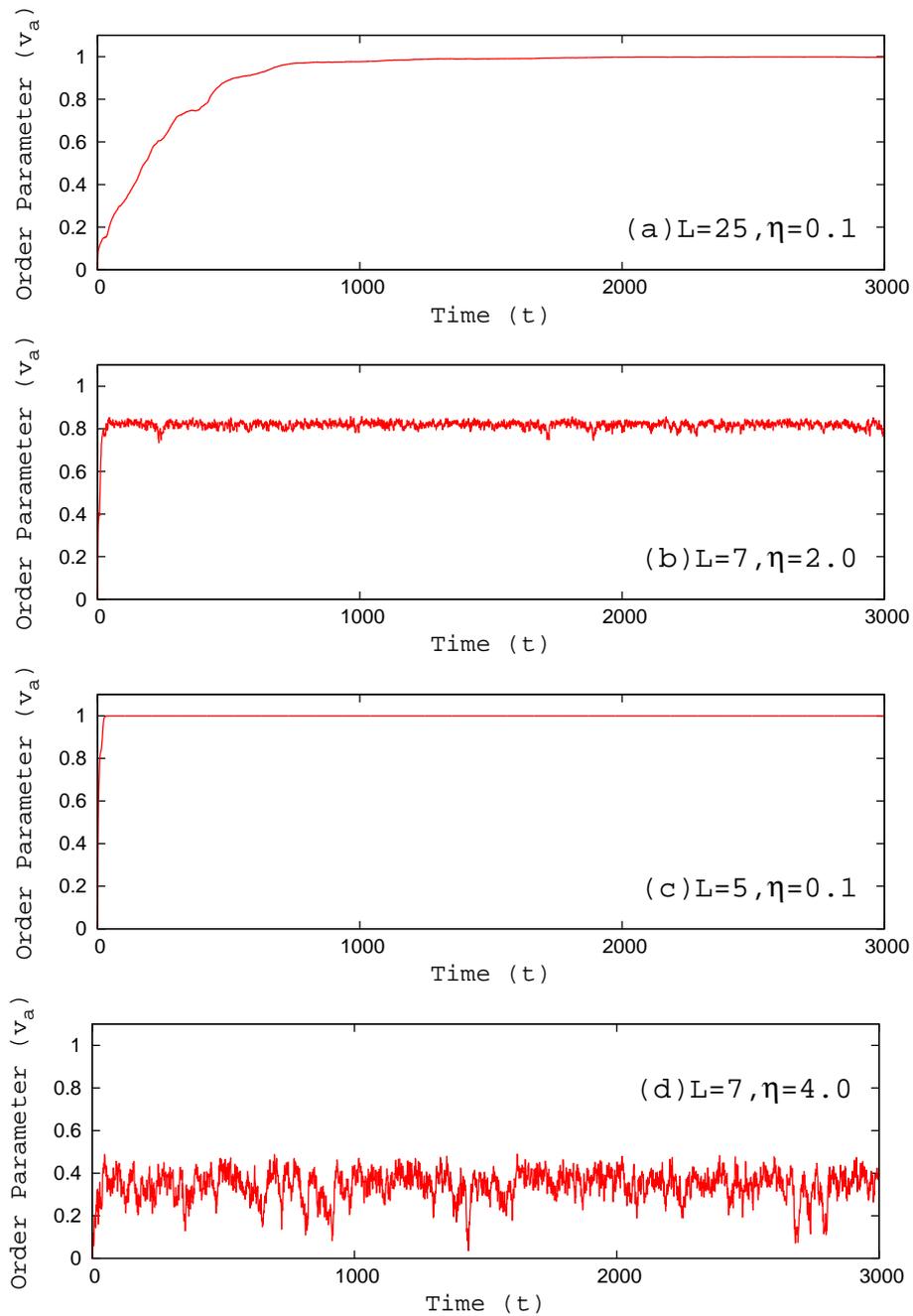


Fig. A.3 Fig. A.2 (a)-(d) のそれぞれについての秩序変数 v_a の時系列プロット. (a) $L = 25, \eta = 0.1$: $t = 1000$ より小さいところでは少し揺らぎがあるものの, その後 v_a は 1 に近づく. (b) $L = 7, \eta = 2.0$: $v_a = 0.8$ くらいで全体として向きは揃っているものの, 多少の揺らぎがある. (c) $L = 5, \eta = 0.1$: v_a がすぐに 1 に近づき, 全体として向きが揃っているのがわかる. (d) $L = 7, \eta = 4.0$: 密度は高いがノイズが大きすぎると v_a の値は小さく, 全体としてあまり向きが揃わず, 揺らぎも大きい.

Fig. A.3 より，いずれの場合も $t = 1000$ 以降では秩序変数の大きな変化は見られない．この意味で Fig. A.2 は，定常状態のはじまりの離散時刻 ($t = 1000$) におけるシミュレーションといえる．また，Fig. A.3 (a),(c) は，ともに $t = 3000$ において $v_a \approx 1$ であり，秩序変数の値だけからは群れの個数を判定することが出来ないが，第 3 章で提案した群れの個数判定法はそれを可能にする．

Fig. A.4 (a),(b) は，定常状態における秩序変数のノイズや密度依存性の図 (Fig. 2.4 (a),(b)) にそれぞれ対応する追試である．Fig. A.4 (a) は縦軸秩序変数の時間平均 $\langle v_a \rangle$ ，横軸ノイズ η とした図である．すなわち，粒子数密度 $\rho = N/L^2$ を固定したままノイズ η の大きさを変えていき，十分時間が経ったときの秩序変数 v_a の時間平均 $\langle v_a \rangle_t$ のノイズ依存性を表したものである．ここで， $\langle v_a \rangle_t$ は離散時間 $t = 5000$ から $t = 15000$ の間の平均

$$\langle v_a \rangle_t = \frac{1}{10001} \sum_{t=5000}^{15000} v_a(t)$$

とした．Fig. A.4 (a) より，粒子数，領域サイズが大きくなるにつれて $\eta = 2.5$ 付近から $\langle v_a \rangle_t$ の値の変化が鋭くなっていくことがわかる．図中の曲線は，関数

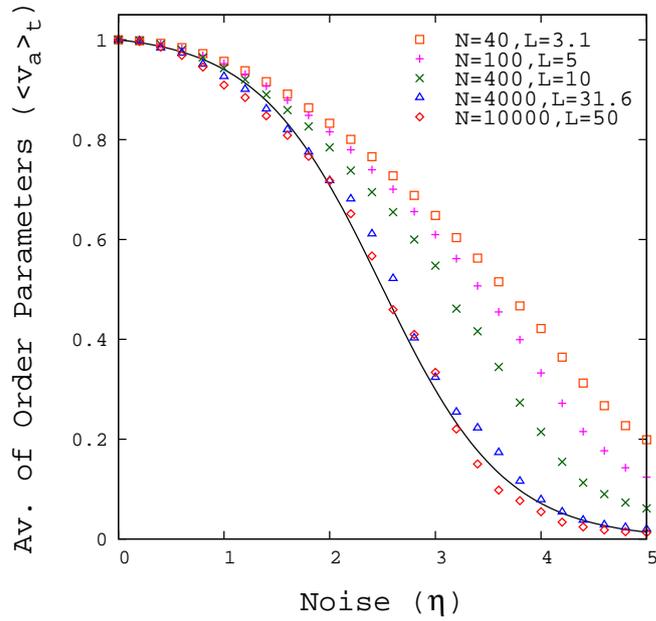
$$f(\eta) = \frac{1 + \tanh(a - b\eta)}{1 + \tanh a} \quad (a = 2.12763, b = 0.854575)$$

のグラフである．関数 f は $N = 10000, L = 50$ のときのデータを最小 2 乗法で近似した双曲正接関数で， $f(0) = 1, \lim_{\eta \rightarrow \infty} f(\eta) = 0$ を満たす．また，

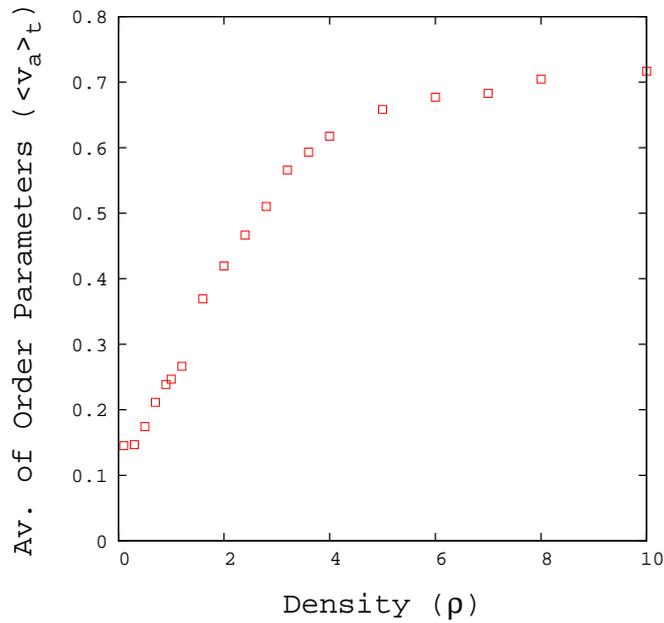
$$f''(\eta) = -\frac{c \tanh(a - b\eta)}{\cosh^2(a - b\eta)} \quad (c = 0.740661)$$

であり，変曲点 ($f''(\eta) = 0$ を満たす点) は $\eta = a/b = 2.48969$ である．

Fig. A.4 (b) は，ノイズを近似関数 f の変曲点付近である $\eta = 2.5$ と固定し，秩序変数 $\langle v_a \rangle_t$ の密度依存性の図である．この結果は Vicsek モデルではノイズのみならず密度に関しても転移の存在を示唆しており，ノイズの影響により，密度 $\rho \gg 1$ において $\langle v_a \rangle_t \approx 0.7$ 付近へ漸近している．以上より，Fig. A.4 は Fig. 2.4 に対応し，先行研究の結果を十分に再現している．



(a) ノイズ η に対する秩序変数 v_a の依存性



(b) 密度 $\rho = N/L^2$ に対する秩序変数 v_a の依存性

Fig. A.4 (a) 密度 $\rho = N/L^2 \approx 4$ を満たす N と L のいくつかの組について横軸ノイズ η , 縦軸 $\langle v_a \rangle_t$ とした図. 実線は $N = 10000$ のデータを最小 2 乗近似した双曲正接 $f(\eta)$ の曲線. パラメータは Fig. 2.4 (a) と同じ粒子数 N と領域サイズ L を用いた. (b) 領域サイズを $L = 20$ としてノイズ $\eta = 2.5$ と固定し, 密度 ρ を大きくしていったときの $\langle v_a \rangle_t$ の変化を表した図.

付録B $\langle\langle \theta(t) \rangle\rangle_r$ の定義

§ 2.1 で述べた $\langle\langle \theta(t) \rangle\rangle_r$ の定義は具体的に書くと次の通りである.

$$\langle\langle \theta(t) \rangle\rangle_r = \begin{cases} \arctan \frac{\langle \sin \theta(t) \rangle_r}{\langle \cos \theta(t) \rangle_r} - \pi & (\langle \cos \theta(t) \rangle_r < 0, \langle \sin \theta(t) \rangle_r < 0) \\ -\frac{\pi}{2} & (\langle \cos \theta(t) \rangle_r = 0, \langle \sin \theta(t) \rangle_r < 0) \\ \arctan \frac{\langle \sin \theta(t) \rangle_r}{\langle \cos \theta(t) \rangle_r} & (\langle \cos \theta(t) \rangle_r > 0) \\ \frac{\pi}{2} & (\langle \cos \theta(t) \rangle_r = 0, \langle \sin \theta(t) \rangle_r > 0) \\ \arctan \frac{\langle \sin \theta(t) \rangle_r}{\langle \cos \theta(t) \rangle_r} + \pi & (\langle \cos \theta(t) \rangle_r < 0, \langle \sin \theta(t) \rangle_r \geq 0) \end{cases}$$

この場合分けは、例えば $\alpha \in (\pi/2, 3\pi/2)$ のとき、

$$\arctan(\tan \alpha) = \alpha - \pi \neq \alpha$$

となることなどによる.

注意 例えば \mathbf{X}_1 の r 近傍にある粒子が 2 つだけのとき、素朴に θ_1 と θ_2 の平均を

$$\langle\langle \theta \rangle\rangle_r = \frac{\theta_1 + \theta_2}{2}$$

として定めると、 $\theta_1 \in (\pi/2, \pi)$, $\theta_2 = -\theta_1$ のとき実際の平均方向の角度は π であるが、 $\langle\langle \theta \rangle\rangle_r = 0 \neq \pi$ となるので、平均方向とは異なる (Fig. B.1).

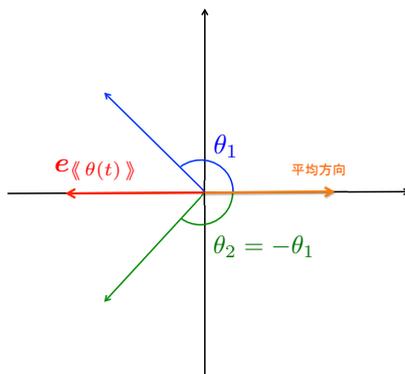


Fig. B.1 $\langle\langle \theta(t) \rangle\rangle_r$ 方向と平均方向の違い

(原稿提出: 2016 年 12 月 30 日; 修正稿提出: 2017 年 2 月 11 日)